

平成 30 年 6 月 7 日現在

機関番号：14501

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2014～2017

課題番号：26870259

研究課題名(和文) Cubature公式、ヒルベルト恒等式、最適実験計画の相互間研究

研究課題名(英文) Study on cubature formulas, Hilbert identities, optimal experimental designs

研究代表者

澤 正憲 (Masanori, Sawa)

神戸大学・システム情報学研究科・准教授

研究者番号：50508182

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,100,000円

研究成果の概要(和文)：組合せ数学、統計、数値解析の3分野とその周辺分野に現れる数理構造のうち、特に対称性の高い「デザイン」と呼ばれる構造について、存在問題、構成問題、分類問題、そして個別のデザインの相互関係について研究した。研究成果は、Journal of the Mathematical Society of Japanなどの数学の一般誌、Journal of Combinatorial Theory Series Bなどの組合せ論の著名誌、Indian Journal of Statisticsなどの統計の著名誌などに掲載された他、国際会議などでも発表されるなど、顕著であった。

研究成果の概要(英文)：I studied existence, constructions, classifications of various types of designs such as combinatorial designs in combinatorics, Euclidean designs in numerical analysis, optimal designs in design of experiments. The results were presented at many conferences/academic seminars and finally published high-quality journals in pure and applied mathematics and statistics including Journal of the Mathematical Society of Japan, Journal of Combinatorial Theory Series B, and Indian Journal of Statistics.

研究分野：代数的組合せ論、実験計画法

キーワード：Cubature ユークリッドデザイン 最適デザイン 直交多項式の零点 再生核

1. 研究開始当初の背景

Cubature 公式 (Cubature Formula, CF) は数値積分法のクラスである。Gauss の名を冠する公式があるように、その存在問題は数値解析学を中心に古くから研究されてきた。一方、代数的組合せ論では、球面上に配置された重み付き点集合 (球面デザイン) が古くから研究されており、その自然な拡張として多重同心球面上の重み付き点集合 (Euclidean Design, ED) の研究も盛況である。これらの研究は、それまで両分野の研究者により、それぞれの視点から独立に展開されてきた。

研究代表者の近年の研究は、数値解析における CF の理論と代数的組合せ論の ED の理論を結び付け、CF の新たな理論的枠組みを与える端緒となるものであり、これまでに組合せ論において未解決であった ED の存在に必要な点の個数に関する自然な不等式 (Fisher 型不等式) の導出などの成果を挙げてきた。

一方、多重同心球面上の CF は ED 以外の諸数理構造とも深く関係している。Reznick (1992) は、多重同心球面上の CF が Waring 問題に関与する Hilbert 恒等式や、有限次元バナッハ空間の等長埋め込みと等価であることを示した。以降、代数や関数解析の研究者が CF の研究分野に参入し、CF と Hilbert 恒等式等の相互間研究が盛んに行われるようになった。

こうした流れのもと、研究代表者も、恒等式の両辺に現れる単項式の係数比較という恒等式論ならではの手法により、超八面体の頂点を用いた構成法から得られる CF の最大次数を決定する Bajnok の定理 (2007) の簡単な別証明を与えるなど、球面積分に対する CF の諸結果を Hilbert 恒等式等を読み換える意義を考察してきた。

他方、実験計画法の分野では、地球内部の自然現象を調べる際などに、そのモデルの推定精度を向上させるため、球面上のどこにサンプル点を取れば良いかを具体的に決定す

る最適計画 (Optimal Design, OD) が必要となる。かつて、実験計画法の大家 J. Kiefer (1962) は、球体上の多項式回帰モデルに対する OD のサンプル点は多重同心球面上の積分に対する CF の点配置として選べば良いことを暗に示したが、CF の諸理論は実験計画法ではほとんど認識されておらず、これにより OD の構成法も十分には見つかっていなかった。

2. 研究の目的

特に原点を中心とする多重同心球面上の積分に対して、構成的なアプローチにより CF の存在問題の進展を図る。前項「1. 研究開始当初の背景」で述べたように、この積分に対する CF は、高次形式論における Hilbert 恒等式や、実験計画法における OD の問題などと深く関与している。本研究では、これらの諸数理構造と CF の相互間研究を通じて、CF の代数的・統計的意味付けや CF を用いた OD の明示的構成法の研究などにも取り組む。具体的に次の研究目標を設定する：

(甲) 研究代表者の先行研究 (Sawa-Xu, Math. Comput., 2013) で提案された球面デザインの幾何的構成法の“多重同心球面化”。

(乙) 研究代表者の先行研究 (Hirao-Sawa-Jimbo, Indian J. Statist., 2014) で提案された B 型ワイル群の軌道を用いた OD の構成法の一般の既約鏡映群についての拡張。

(丙) Hilbert (1909) による恒等式の漸近存在定理の、CF の逐次的構成法のアイデアに基づいた別証明。

3. 研究の方法

(1) 成果目標 (甲) について

前項「2. 研究の方法」で触れた Sawa-Xu (2013) による球面デザインの幾何的構成法を“多重同心球面化”する。球面上では、“変

数の斉次化”により，次数 $t-2, t-4, \dots$ の多項式は次数 t の斉次多項式に帰着されるが，この事実は多重同心球面上では上手くない．次数 t のCFは， t 次以下の多項式の空間の次元に左右されるある方程式系の解に帰着されるが，多重同心球面上のCFの場合，解くべき方程式系の規模が極端に大きくなってしまふ．この問題を解決するべく，以下の二つのアプローチを検討する．

一つは，Nozaki-Sawa (Canad. J. Math., 2012)の結果を拡張することである．すなわち，有限群の軌道からなるCFが次数 t であることと，次数 t の不変多項式についてのみCFの等式が成り立つことの等価性定理を用いて，解くべき方程式系の規模を縮小することである．二つ目は，方程式系のGröbner基底を計算し，より簡単な表示をもつ方程式系に帰着させることである．Gröbner基底の計算に定評のある数式処理ソフトcfep/Asirなどを適宜使用し，課題解決にあたる．

一連の研究は，過去に類似のテーマで共同研究実績のあるYuan Xu教授(オレゴン大)，野崎寛講師(愛教大)などと研究交流を密にしながら進捗させる．

(2) 成果目標(乙)について

前項「(1) 成果目標(甲)について」の提案手法から得られるCFのD最適性を検証する．研究代表者は，2012年7月に催された統計学の国際学会“The 2nd Institute of Mathematical Statistics Asia Pacific RIMS Meeting”への参加を機に，実験計画法の理論と応用に詳しいJ. Stufken氏(Georgia大)と知り合い，以後，同氏との研究交流が続いてきた．本研究は，ODの構成問題の進捗状況に応じて，ロバストネスなどの観点から，得られたODの統計的意義を評価する．本研究は，Stufken氏との研究交流を密にしながら進捗させる．

(3) 成果目標(丙)について

次数 $2m$ の斉次式 $(\sum_{k=1}^n x_k^2)^m$ を x_k 達の実一次形式の $2m$ 乗項の和で表す恒等式をHilbert恒等式という．特に各一次形式が有理一次形式であるようなHilbert恒等式は有理的表現と呼ばれ，代数学において様々な応用がある．

Hilbert(1909)は，任意の m, n に対して十分多くの $2m$ 乗項をとれば有理的表現が必ず存在することを示した．Hilbertのオリジナルの証明は，その長大さや緻密な議論等により，解読が極めて難しいことで知られている．

そこで本研究では，一変数のガウス積分に対して有理点からなるCFを構成し，これを逐次的に合成することにより多変数ガウス積分に対する“有理的な”CFを構成する．その後，このCFの点配置の適当な射影によって，多重同心球面上の有理的なCFを構成し，Hilbertの結果の別証明を試みる．

一連の研究を円滑に遂行するべく，「河原林巨大グラフプロジェクト」(JST-ERATO)やJCCAなどと連携して，関連分野の大規模な研究集会やセミナーを開催し，研究情報交換の場を増やす．

4. 研究成果

前項「3. 研究の方法」で掲げた成果目標を概ね達成した．後述の「5. 主な発表論文等」に記載したように，4年間で査読付き学術論文6編，講演業績21件の成果をおさめた．なかには学術論文[3,6]など統計学や組合せ論の国際的トップジャーナルや，著名な研究集会における基調・特別講演[1A]なども含まれている．

5 . 主な発表論文等

〔雑誌論文〕(計 6 件)

[1] M. Sawa, H. Kikyo.

Kähler theory for countable quadruple systems.

Tsukuba J.Math., Vol.41, 189-213 (2017)

[2] K. Matsubara, M. Sawa, S. Kageyama.

Existence on splitting-balanced block designs.

Graphs Combin., Vol.33, 561-572 (2017).

[3] M. Sawa, M. Hirao.

Characterizing D-optimal rotatable designs via finite reflection groups.

Indian J. Statist., Vol.79, 101-132 (2017).

[4] M. Hirao, T. Okuda, M. Sawa.

Some remarks on cubature formulas with linear operators.

J.Math.Soc.Japan, Vol.68, 711-735 (2016).

[5] M. Sawa.

On a symmetric representation of Hermitian matrices and its applications to graph theory.

JCT(B), Vol.116, 484-503 (2016).

[6] 澤 正憲.

Cubature公式の理論.

数学, Vol.68, 24-53 (2016).

〔学会発表〕(計 21 件)

1 . 基調・特別講演, 招待講演

[1A] 澤 正憲

Quasi-Hermite polynomials, Quadrature formulas, Haudorff-type

Diophantine equations.

非線形波動研究の新潮流 (RIAM研究集会)

九州大学応用力学研究所, 2017年11月 .

[2A] 澤 正憲 .

準直交多項式の判別式の明示公式とその組合せ論的応用.

数学談話会 .

近畿大学, 2017年10月 .

[3A] 澤 正憲 .

準直交多項式の判別式の明示公式とそのデザイン理論への応用.

第34回代数的組合せ論シンポジウム .

小山高専, 2017年6月 .

[4A] 澤 正憲 .

Euclidean Design Theory .

統計的モデリングと計算アルゴリズムの数理と展開 .

名古屋大学, 2017年2月 .

[5A] 澤 正憲 .

古典直交多項式の零点, Szegő核の有理性.

数学談話会 .

信州大学, 2016年11月 .

[6A] 澤 正憲 .

古典準直交多項式の零点の有理性と幾何的デザイン .

第33回代数的組合せ論シンポジウム .

滋賀大学, 2016年6月 .

[7A] 澤 正憲 .

ある不定方程式の解と準エルミート多項式の零点の有理性 .

幾何学・組合せ論に現れる環と代数構造 (RIMS 研究集会).

RIMS, 2015年6月 .

[8A] M. Sawa.

On a system of Diophantine equations and quadrature on the real line.

The 13th Workshop on Algebra and Combin., Kyushu Inst. Tech., JAPAN, Janu 2015.

[9A] M. Sawa.

An analytic generalization of combinatorial designs and its Applications in the theory of Banach spaces and Hilbert identities.

The 3rd Institute of Mathematical Statistics Asia Pacific RIM Meeting. Howard International House, Taipei, TAIWAN, Jun 2014.

1. 一般講演

[1B] 吉田 和輝, 佐竹 翔平, 澤 正憲.

強さ 3 の circulant almost orthogonal arrays の構成法.

2017 年応用数学合同研究集会.

龍谷大学, 2017 年 12 月.

[2B] M. Sawa.

Gaussian designs, quasi-Hermite polynomials, Hausdorff-type Diophantine equations.

5th Interntional Combin. Conf. (5ICC).

Monash Univ., AUSTRALIA, Dec 2017.

[3B] 澤 正憲.

エルミート行列の対称性, 慣性指数の非対称性.

日本応用数理学会 2017 年度年会 (離散システム研究部会).

武蔵野大学, 2017 年 9 月.

[4B] 澤 正憲.

Countable Kohler graph, quadruple systems, and projective plane.

2016 年度応用数学合同研究集会.

龍谷大学, 2016 年 12 月.

[5B] 澤 正憲, 平尾 将剛, 山本 裕貴.

超八面体の辺の等内分点を用いた D 最適計画およびバナッハ空間の等長埋込みの構成法. 2016 年度統計関連学会連合大会 (計算機統計セッション).

金沢大学, 2016 年 9 月.

[6B] 澤 正憲, 平尾 将剛, 山本 裕貴.

超八面体の辺の等分点を用いた D 最適実験計画の構成法について.

日本数学会 2016 年度年会 (統計分科会).

筑波大学, 2016 年 3 月.

[7B] 澤 正憲,

On a bound for the inertia of Hermitian matrices and its applications to finite combinatorics.

代数的組合せ論とその周辺.

東北大学, 2016 年 3 月.

[8B] 澤 正憲.

測度空間上のデザイン理論の構築に向けて III - Sobolev の定理とその一般化.

2015 年度日本数学会秋季総合分科会 (統計分科会).

京都産業大学, 2015 年 9 月.

[9B] 澤 正憲.

Coxeter 群の基本ルートを用いた D 最適実験計画の構成および分類定理.

2015 年度統計関連学会連合大会 (計算機統計セッション).

岡山大学, 2015 年 9 月.

[10B] 澤 正憲.

測度空間上のデザイン理論の構築に向けて III - Sobolev の定理とその一般化.

2015 年度日本数学会秋季総合分科会 (統計分科会).

京都産業大学, 2015 年 9 月.

[11B] S. Satake, M. Sawa, M. Jimbo.
Erdős-Rényi Theory for Asymmetric
Digraphs.
The 18th Japan Conference on Discrete and
Computational Geometry, Graphs.
Kyoto Univ., Kyoto, JAPAN, Sept 2015.

[12B] K. Onaka, M. Sawa.
Winner of graph Ramsey game for small
orders.
The 18th Japan Conference on Discrete and
Computational Geometry, Graphs.
Kyoto Univ., Kyoto, JAPAN, Sept 2015.

〔図書〕(計1件)

[1] J.H. van Lint, R.M. Wilso (著). 澤 正
憲, 萩田 真理子, 神保 雅一 (訳).
ヴァンリント&ウィルソン「組合せ論」上巻.
pp.307, 丸善出版, 2018.

〔その他〕

1. 研究集会・セミナーの世話人

[1] 田中 初太, 谷口 哲至, 澤 正憲, 三
村 万佐人, 佐野 良夫, 瀬川 悦男 他.
Spectral Graph Theory and Related
Areas.
(年1回開催, スペクトラルグラフ理論関連
の会議)

[2] 河原林 健一 (代表) (他10名以上).
Japanese Conference on Combinatorics
and its Applications (JCCA).
(年1回開催, 組合せ論関連の会議)

[3] 津村 博文, 内山 成憲, 脇 克志, 生
田 卓也, 内田 幸寛, 澤 正憲.
代数学と計算.
於 首都大学東京.
(隔年開催, 代数学関連の会議)

[4] 木村 俊一, 谷口 哲至, 奥田 隆幸,
澤 正憲, 平尾 将剛, 門脇 聖.
広島組合せ論セミナー.
於 広島大学/広島工業大学.
(4ヶ月に1回開催. 組合せ論関連セミナ
ー)

[5] 桔梗 宏孝, 澤 正憲, 佐竹翔平, 岡部
俊介.
神戸 組合せ論/モデル理論セミナー.
於 神戸大学.
(3カ月に1回開催. 組合せ論とモデル理論
関連のセミナー)

6. 研究組織

(1)研究代表者
澤 正憲 (Masanori Sawa)
神戸大学大学院システム情報学研究科
准教授

研究者番号: 5 0 5 0 8 1 8 2