

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 30 年 6 月 4 日現在

機関番号：12612

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2014～2017

課題番号：26870368

研究課題名(和文) 曲面の写像類群に対する表現論的アプローチ

研究課題名(英文) A representation theoretic approach to the mapping class group of surfaces

研究代表者

榎本 直也 (Enomoto, Naoya)

電気通信大学・大学院情報理工学研究科・准教授

研究者番号：50565710

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,000,000円

研究成果の概要(和文)： 曲面の写像類群に付随するJohnson準同型は、写像類群のトレリ部分群について、シンプレクティック微分のなすLie環の中に一次近似を実現する。本研究では、シンプレクティック微分のなすLie環の中で、このJohnson準同型の像を定量的に評価する結果を得た。

まず自由群のIA-自己同型群に対するJohnson準同型に対する余核の構造を用い、写像類群のJohnson準同型についてもその余核の中に新しいクラスを導入した。次に、この余核の中に、新しい無限系列を複数同定した。これは、写像類群のJohnson準同型の像が当初想定されていたよりも小さい可能性を示唆するものである。

研究成果の概要(英文)： The Johnson homomorphism for the mapping class group of surfaces give an approximation for the Torelli subgroup of the mapping class group in the Lie algebra of the symplectic derivations. In this study, we evaluate the Johnson image in the Lie algebra of symplectic derivations.

First, we give a new class (Enomoto-Satoh obstruction) in the cokernel of the Johnson homomorphism using the structure of the Johnson cokernels for the IA-automorphism group for the free group. Second, we detect some new series ("anti-Morita" obstructions and some "hook type obstruction") of Sp-irreducible representations in the Johnson cokernels for the mapping class group. Our results suggest that the Johnson image is not so big in the Lie algebra of symplectic derivations.

研究分野：表現論

キーワード：写像類群 表現論 Johnson準同型

1. 研究開始当初の背景

種数 g で境界成分を 1 つ持つ向き付けられたコンパクトリーマン面 Σ に対し、その微分同相群から得られる無限離散群として写像類群やそのトレリ部分群があり、これらの構造を調べることはトポロジーの重要なテーマの一つである。無限離散群の構造を調べる一つの手法として、中心列による次数商から得られる Lie 環を用いる方法がある。

写像類群の場合、それは Johnson 準同型と呼ばれている。Johnson 準同型は、トレリ群の Johnson filtration と呼ばれる中心列の次数商から得られるリー環を、シンプレクティック微分のなすリー環に実現するものである。この像や余核の大きさに関する評価を得ることは、トレリ部分群の一次近似として重要な意味を持つ。

他方、写像類群にはシンプレクティック群への Dehn-Nielsen の全射があり、トレリ部分群はその核となっていることから、Johnson 準同型の議論はシンプレクティック群の表現論が適用できる対象となる。

R. Hain によって Johnson 準同型の像は次数 1 部分から Lie 環として生成されることが示され、森田茂之によって「森田 trace」と呼ばれる余核のシンプレクティック群の既約成分 $[k]$ の同定が行われてきた。しかしこうした先駆的な研究にもかかわらず、その後、低次の場合の余核の決定 (シンプレクティック群の表現としての既約分解の決定) など、いくつかの部分的な研究はあったものの Johnson 準同型の像や余核がどの程度の大きさを持っているのかを評価する議論は進んでいない状況であった。

2. 研究の目的

本研究では、種数 g で境界成分を 1 つ持つ向き付けられたコンパクトリーマン面 Σ に付随する写像類群とそのトレリ部分群に対する Johnson 準同型について、その像や余核の持つ構造をシンプレクティック群の表現論を適用しながら定量的に明らかにし、トポロジー側から得られている関連する結果との比較検討を行うことを目的とした。

3. 研究の方法

トポロジーに関連して現れる無限離散群のひとつに自由群とその自己同型群がある。自由群の自己同型群とその部分群である IA-自己同型群についても、中心列の次数商から得られる Lie 環を研究することができる。この議論を導入したのは 1960 年代の Andreadakis による議論であるが、その後、佐藤隆夫によって精力的な研究がすすめられ、IA-自己同型群に対する Johnson 準同型の像と余核が 2006 年に完全に決定された。本研究ではこの結果を用いて、写像類群とそのトレリ部分群に対する Johnson 準同型の像と余核の大きさを評価する。

特にシンプレクティック群の表現論を利

用して Johnson 準同型の像や余核に現れる具体的な既約成分を同定する。その際、表現論の側からは、シンプレクティック群と対称群 (あるいはその一般化としてのブラウアー代数) との間に成り立つ Brauer-Schur-Weyl 双対性を利用する。これにより、 Σ の first homology H のテンソル積空間において、シンプレクティック群の表現とみたときの極大ベクトルを組合せ論的に明示できる。Johnson 準同型の像は、このテンソル積空間の中でシンプレクティック微分のなすリー環の中に実現されている。従って、極大ベクトルの表示と自由群の IA-自己同型群に対する佐藤の結果を組み合わせることで、Johnson 準同型の像や余核に現れるシンプレクティック群の既約表現を、その重複度まで込めた形で、定量的に取り扱うことができる。

4. 研究成果

(1) 曲面の写像類群に付随する Johnson 準同型に関連して、以下のような研究成果を得た。

まず第一に、佐藤隆夫との共同研究により、トレリ部分群の Johnson 準同型の余核の中に新しいクラスを導入した (Enomoto-Satoh 障害; Enomoto-Satoh 雑誌論文②)。これは佐藤による自由群の IA-自己同型群に対する Johnson 余核の決定という結果を利用してトレリ群の Johnson 余核に関する結果に読みかえるものである。この新しいクラスは、本研究以前に知られていた「森田 trace」を含む新しい余核のクラスである。同時に、Brauer-Schur-Weyl 双対性を用いてシンプレクティック群の極大ベクトルを明示的に記述することにより、極大ベクトルの空間が Enomoto-Satoh 障害で零化されるか否かを定量的に調べられるため、余核に現れる既約表現の系列を明示的に与えることが可能となる。

第二に、上記の方法により、トレリ群の Johnson 余核の中に、具体的な既約成分として $[1^k]$ ($k \equiv 1 \pmod{4}$) という新しい無限系列が現れることを同定した (Enomoto-Satoh 雑誌論文②)。これは、「森田 trace」以降で、初めて与えられた明示的なシンプレクティック群の既約表現の無限系列である。

第三に、榎本彦衛との共同研究により、トレリ群の Johnson 準同型の余核の中に、 $[r+1, 1^{k-r-1}]$ という hook 型のヤング図形で表されるシンプレクティック群の既約表現の無限系列を同定した (Enomoto-Enomoto 雑誌論文①)。また、これに引き続き、 $[k-2]$ という rank の下がった既約成分について、重複度まで込めた同定を行った。これについては現在論文執筆中である。

われわれの結果以前に知られていた無限系列は「森田 trace」のみであり、それ以外は、4 次までの余核の構造のみが知られているに過ぎなかった。われわれの結果は、Johnson 準同型の中に新しいクラスとそれに属する無限系列を具体的に与えた点で、

Johnson 余核の構造に新しい進展を与えたと
言える。しかも、われわれの研究以前は、
Johnson 準同型の像がシンプレクティック微
分のなす Lie 環の中で比較的大きい (余核は
大きくない) だろうとの期待もあったと思わ
れる。しかし今回の我々の研究により、余核
の中に多くの既約表現の系列が同定され、当
初の期待よりも余核が大き (像が小さい)
ことが示唆されたと言え、この研究を進める
ための重要な役割を果たしたと言え。

われわれの導入した Enomoto-Satoh 障害は、
Johnson 準同型の構造を理解する上で、その
後の関連する研究に影響を与えている。

森田-逆井卓也-鈴木正明による 6 次までの
Johnson 余核の完全な同定やシンプレクティ
ック微分のなす Lie 環のアーベル化の研究な
どにおいて重要な役割を果たした (引用文献
①等)。特に、5 次までは Enomoto-Satoh 障害
によって余核が完全に決定できること、また
同時に 6 次には Enomoto-Satoh 障害では同定
できない余核の既約表現が存在することが
示された。

また、Conant-Kassabov-Vogtmann によるグ
ラフホモロジーを用いた Johnson 余核の構造
の研究において再解釈されている (引用文献
②等)。これにおいても Enomoto-Satoh 障害
では同定できない余核の既約表現が与えら
れている。

さらに、河澄響矢-久野雄介による Goldman
Lie 双代数を用いた Johnson 準同型へのトポ
ロジカルなアプローチにおける再解釈 (引用
文献③等) もある他、それに引き続いて行わ
れた A. Alekseev, N. Kawazumi, Y. Kuno,
F. Naef による研究では、高次の
Kashiwara-Vergne 問題の解を用いた再解釈
が与えられ、KZ 接続などの可積分系との新し
い関係が示唆されている (引用文献④等)。

これに関連して、河澄-久野により導入さ
れた Goldman Lie 双代数を用いたトポロジカ
ルな Johnson 余核のクラスについて、我々の
導入した Enomoto-Satoh 障害との関係につい
ても比較した。われわれの同定した $[1^k]$ と
いう既約成分は、河澄-久野によるクラスの
外側にあり、両者の間にはギャップが存在す
ることが示された。これは、佐藤-久野との
共同研究として、現在論文執筆中である。

今後の課題として、われわれの導入したク
ラスに属する既約表現のより詳細な同定を
行う必要がある。上で述べたように、Johnson
準同型の余核とわれわれが導入した新しい
クラスとの間にはまだ一定のギャップが存
在し、Johnson 準同型の像がわれわれのク
ラスの中でどの程度の大きさを持つのかは
はっきりしていない。また、現状ではシンプレ
クティック群の表現の構造のみに着目して
いるが、シンプレクティック微分のなす Lie
環としての構造については表現論的な理解
が進んでいないと言えない。われわれの導入
したクラスは、シンプレクティック微分のな
すリー環の部分リー環であり、Johnson 準同

型の像は我々のクラスの中に含まれる部分
リー環となっている。R. Hain の導入した Lie
環としての構造の解明は、その混合 Hodge 構
造とも深く関係しており、表現論的にも興味
深いと考えられる。こうした観点から
Johnson 余核の構造を研究する必要があると
考えられる。

(2) トポロジーと表現論の新しい関わりと
いう観点から、以下のような知見を得た。

① ワイル群の quasi-invariant の研究

ワイル群の多項式環への作用に関する不
変式環は基本不変式の多項式環と同型であ
り、多項式環は不変式環上自由であるという
結果が古典的によく知られている。不変式環
と多項式環の間に quasi-invariant のなす環
の列が構成できる。例えば対称群の場合、
 $f\text{-s_if}$ が $(x_i - x_j)^{2m+1}$ で割り切れる場
合、 f は m -quasi invariant であるとい
い、その全体を Q_m とかけば、多項式環の中
に $Q_1 \supset Q_2 \supset \dots$ という不変式環を含む系列が得
られる。 Q_m も不変式環上自由となる。この自
由基底については未だに十分理解されてい
るとは言えない状況である。

本研究では阿部拓郎との共同研究により、
対称群や B 型ワイル群の m -quasi invariant
について低階数の場合について調べ、いくつ
かの知見を得た。特にその中でもワイル群の
鏡映表現に関係する部分において、ワイル群
の作る超平面配置との関連を示唆する結果
を得ている。これには有理 Cherednik 代数の
表現論が深く関係していると思われる。阿部
-吉永正彦-M. Feigin と共同研究を進めて
おり、いくつかの論文を現在執筆中である。

② Solomon-寺尾多項式の表現論的解釈

超平面配置の持つ不変量のひとつである
Solomon-寺尾多項式は、超平面配置の補空間
のポアンカレ多項式とワイル群に付随する
旗多様体のポアンカレ多項式を含むもので
ある。①の研究過程の中で、有理 Cherednik
代数の表現論を用いた Solomon-Terao 多項式
の再解釈の可能性についての知見を得た。ま
た、旗多様体の Springer fiber の一般化で
ある Hessenberg 多様体のコホモロジー環と
超平面配置に関する最近の進展との関係に
ついてはいくつかの知見を得た。

今後はこれらの方向性についても、表現論
とトポロジーの新しい関わりを探ってい
きたいと考えている。

(3) 本研究の 4 年間において、以下のような
研究集会を開催し、関連する分野の研究者と
の情報共有を行い、新しいアプローチへの可
能性を得た。

① 電気通信大学における研究集会

2014 年度から 2017 年度まで 4 年間におい
て、毎年 11 月に電気通信大学において小規

模な研究集会を開催した。表現論と関連する分野、特にトポロジーや超平面配置、可積分系などの研究者を招聘し、表現論側の研究者と議論を行うことで情報や問題意識の共有、新しい課題の設定やアプローチの方法等について討議を行った。

② 研究集会「Algebraic Lie Theory and Representation Theory 2016」の開催

2016年度に表現論分野の国内外の研究者を招聘して研究集会 Algebraic Lie Theory and Representation Theory (6月・菅平高原)を開催し、表現論に関する多くの研究者と情報共有を行った。

また本研究集会の成果を社会に還元する観点から、報告集を作成し公表した。

<引用文献>

- ① S. Morita, T. Sakasai, M. Suzuki, Structure of symplectic invariant Lie subalgebras of symplectic derivation Lie algebras, *Advances in Mathematics* 282 (2015), 291-334.
- ② J. Conant, The Johnson cokernel and the Enomoto-Satoh invariant, *Algebraic & Geometric Topology* 15 (2015) 801-821
- ③ N. Kawazumi, Y. Kuno, Intersection of curves on surfaces and their applications to mapping class groups, *Annales de l'institut Fourier*, Volume 65 (2015) no. 6, p. 2711-2762
- ④ A. Alekseev, N. Kawazumi, Y. Kuno, F. Naef, Higher genus Kashiwara-Vergne problems and the Goldman-Turaev Lie bialgebra, *Comptes Rendus Mathematique*, 355-2, 2017, 123-127

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計2件)

- ① Hikoe Enomoto and Naoya Enomoto, Sp-irreducible components in the Johnson Cokernels of the mapping class group of surfaces I, *Jornal of Lie Theory*, 24-3, 2014, 687-704, 査読有
- ② Naoya Enomoto and Takao Satoh, New series in the Johnson cokernels of the mapping class groups of surfaces, *Algebraic & Geometric Topology*, 14-2, 2014, 627-669, 10.2140/agt.2014.14.627, 査読有

[学会発表] (計0件)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

榎本 直也 (Enomoto Naoya)

電気通信大学・大学院情報理工学研究所・
准教授

研究者番号：50565710