様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ３０ 年　 ６ 月 １９ 日現在

機関番号：１３１０１
研究種目：若手研究(B)
研究期間：2014～2017
課題番号：２６８７０５９８

研究課題名（和文）作用素環論を用いた距離空間の大規模構造に関する研究

研究課題名（英文）Large scale structure of metric spaces from the viewpointo of operator algebras

研究代表者
酒匂　宏樹（Sako, Hiroki）

新潟大学・自然科学系・准教授

研究者番号：７０７０８３３８

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　2,400,000円

研究成果の概要（和文）：本研究は数学についての研究である。数あまたありえる数学の研究課題のうち特に距離空間の大規模構造について新たな定理を発見するべく取り組んだ。距離空間について調べるためには様々な方法がありえるが、作用素環論を用いる方法を採用した。研究代表者は以前から作用素環論を研究しており、これまでに培ってきた知識が活かされた。距離空間の従順性と呼ばれる性質と、作用素環の有限次元近似性質の対応は従来から知られていたが、その一般化を試みた。

研究成果の概要（英文）：In this project, I examined mathematical research. The subject was large scale geometry on metric spaces. I tried to come up with new theorems related to the subject. There may be various ways in which we examine metric spaces. I decided to make use of knowledge on operator algebras. My knowledge on operator algebra has been utilized for this project. It has been pointed out that amenability on metric space corresponds to finite dimensional approximation property on operator algebras. In this project, I tried to generalize such kind of correspondence.

研究分野：数学(作用素環論)

キーワード：距離空間　大規模構造　作用素環

1．研究開始当初の背景

幾何学的群論と関数解析学との関連を見出す研究が近年盛んに行われているが、その課題に新たな視点で取り組もうと計画されたのが本研究である。

代数トポロジーなどでは多様体の基本群が重要な役割を演じる。しかし基本群といった離散群はそれ自体が距離構造を持っており、群自身を粗い幾何学 Coarse Geometry 的な研究課題と捉えることができる。もともとの多様体の性質をある程度反映しているため、重要な研究課題と捉えられている。

また離散群やその作用から作用素環を定義することができ、離散群を関数解析学的(とくに作用素環論的)に解析することが可能である。

本研究課題で私はさらによくばって、より一般の離散距離空間の性質と、作用素環の性質の対応をより詳しく調べ、上記の研究課題に貢献することを目指した。

2．研究の目的

本研究の目的は距離空間の構造を関数解析的な手法で調べることであった。 距離空間の例としてとくに

- 有限生成離散群に語長距離を導入したもの
- 有限グラフの非交和

に注目して探究を進めた。 これらの研究課題は主に基本群が重要な役割を演じる幾何学との関連を重視した。本研究では作用素環論的な表現を中心に据えた離散距離空間の大規模構造に関する研究を行った。 作用素環の有限次元近似性質やその一般化についての考察を深めることで距離空間の研究を進展させた。

距離空間の研究は有限生成群の漸近挙動を調べる際にも大変有用である。 群の列 Gn があるとき，非交和 X = G1 ⊔ G2 ⊔ · · · はそれ自体が距離空間である。 X の従順性が群の列 Gn のどのような性質と対応しているのか専攻研究は全くない。 Box 空間と呼ばれる距離空間は X の一例で，Coarse Baum--Connes 予想など種々の指数定理の反例を構成する際に用いられている。 よって作用素的指数理論への理解を深めるためにも重要な研究課題である。

3．研究の方法

離散群と距離空間の大規模構造を調べるために，論証では以下の手法を用いた。

- 群を点としてとらえ，群の集合を空間としてとらえる``Cayley 位相" という枠組みを用いた
- 有限生成群の列を距離空間ととらえて，漸近挙動を調べた
- 距離空間からその大規模構造を反映した亜群を構成した。
- 距離空間から Translation C*-環を構成して，有限次元近似性質を調べた。

研究手法の検討のため以下の方法で情報収集をおこなった

- 国内外で行われる研究集会に参加する。研究発表を積極的に行った。
- 研究打ち合わせのため国内および国外の研究者を訪ねた。

本研究ではまず手始めに、Cayley 位相を用いて研究を始めることとした。 Cayley 位相空間を用いると群を点として，群の集合を空間としてとらえることが可能になる。 関数解析学の歴史を鑑みると，群を群からなる空間の一点としてとらえることは幾何学的群論の更なる発展の契機になる可能性がある。 従順性の研究のため，まず手始めに一般位相的な考察から始めることとした。

4．研究成果

本研究ではおおむね当初の計画通り実行できた。一部では予想よりも多くの成果を得た。

本研究は距離空間の大規模構造の研究である。集合に距離の構造を導入したものが距離空間であるが、その大規模構造とはなんだろうか。まずその点について概説したい。

実数全体の集合には絶対値によって距離が導入される。ここで整数全体からなる部分集合を考えよう。 実数全体と整数全体は等長でも同相でもない。しかし遠くから眺めて目を細めるとどちらも直線状になっていて区別がつかない。本書で定義されている Coarse 同値という数学的概念に基づけば、実数全体の空間と整数全体の空間とを同一視できる。直感的にいえば、大規模構造とは遠くから見たときの距離空間の姿である。このように遠くから見た様子がだいたい同じかどうかという観点で分類すること、 遠くから見た様子で決まる性質について調べることが、 距離空間の大規模構造の研究である。

距離空間の大規模構造について考えるときには局所的な構造が乏しい離散距離空間を考えると都合がよい。続いて重要なのは、距離空間の間の射である。離散的距離空間の間の写像としては等長写像を考えることよりも、 条件を緩めた擬等長写像や、 さらに弱めた Coarse 埋め込みを考えることが提唱されている。この枠組みでは実数全体の集合 R と整数の集合 Z の間に同型射が存在することになる。これを持って Coarse 同値であるという。

このような距離空間の大規模構造の研究は、独立した研究対象と捉えることもできるが、群論との関連が特に重要視されている。幾何学的群論で重要な役割を演じる語長距離について解説する。G を有限生成離散群、S をその生成集合とする。群 G の上の群構造と

相性のいい距離は次で定められる。
$d(x, y) = \min\{ n \in N : x \in (S \vee S^{-1})^n y \}, x, y \in G.$
つまり、群の二元 x, y の間の距離が n 以下であるということは n 個以下の生成元で
$$x = s_1 s_2 \cdots s_n y$$
が成り立つものがあることをいう。
例えば整数の群 Z に生成集合
$$S = \{-1, 1\}$$
による語長距離を導入した場合、得られる距離空間は直線上の等間隔な点である。語長距離は生成集合 S の選択に依存しているが、もし S をほかの生成集合に取り換えたとしても G の大規模構造は変わらない。種々の大規模構造を研究し、それを通して群を分類することが幾何学的群論のひとつの主題である。

特に有限生成群の列を距離空間と捕らえその漸近挙動を調べる研究課題については多くの成果が得られ、東北大学の見村万佐人氏との共著論文としてまとめることができた。この研究課題については Group approximation in Cayley topology and coarse geometry – Part I, Part II, Part III と題した三部作の形で研究成果を発表できた。うち一件はすでに雑誌に掲載されており、残り二件は投稿中である。
この連作の題材となった有限群の列
$$G1, G2, G3, \cdots$$
は二つの文脈で捉えることができる. まず, 有限生成群の集合の元からなる点列と捕らえることが可能である. その際には点列の集積点, 言い換えると上の点列の部分列の極限である. 集積点の一つ一つが群であり, その群の性質を調べることができる.
続いて, 上の群の生成元集合を固定して考えてみると, 上の列は離散距離空間の列と思うことが可能である. さらに離散距離空間の列から, 粗い距離空間を一つ作ることが可能である. この距離空間の大規模構造を調べることもできる.
群の列にたいして二つのまったく異なる捕らえ方が可能なわけであるが, その二つの性質が何らかの意味で対応しているのではないかと予想し, 研究を推し進め, 多くの成果を得ることができた.
Part I では群の従順性と距離空間の Property A が対応していることを示した。Property A は作用素 K 理論の研究の中で Guoliang Yu 氏が考え出した距離空間の特性である。Property A をもつ距離空間と持たない距離空間があるが、ひとたび Property A をもつことがわかれば、Hilbert 空間に大規模構造を保ったまま埋め込めることが保障され、Coarse Baum–Connes 予想という大変良い性質が導かれる。私たちの研究の Part I では有限群の列が Property A をもつかどうかを Cayley 位相によって判定できることがわかった。これによって Hilbert 空間に埋め込めるような距離空間の例が群を使ってたくさん構成できるようになった。さらに距離空間についての先行研究と合わせて、距離構造をゆがめることではじめて Hilbert 空間に埋め込めるような、一風変わった距離空間を構成することにも成功した。
Part II では群の a-T-menability と距離空間の埋め込み可能性について研究を行った。A-T-menability は Gromov によって発明された、群の特性で、従順性(Amenability)を一般化して得られる特性である。a-T-menable 群に Cayley 位相の意味で収束する有限群の列から、弱い意味で Hilbert 空間に埋め込める距離空間の例が構成できる。埋め込み可能性から a-T-menability を導く定理も証明できた。また以上の結果は大幅に拡張できる。A-T-menability だけでなく、A-T-menability の一般化についても上記の結果と同様の定理が示せた。有限群の列が与えられたときにその Cayley 位相の意味での極限を考えることもできるし、無限距離空間も考えることができる。前者の群としての特性と、後者の距離空間の大規模構造が対応していることがわかった。
Part III で扱ったのは群の Property (T) と幾何学的 Property (T)である。Property (T)は元々群の表現論の研究のため、Kazhdan が定義したものである。Kazhdan はある種の Lie 群に対してこの特性が成り立つことを示した。Part III でも有限群の列から与えられる Cayley 極限群と、無限距離空間を考えた。前者の Property (T)と後者の幾何学的 Property (T)の対応を示すことができた。また、Part I、Part II の一部に別証明を与えた。
この三部作では群の従順性、a-T-menability、Property (T)という解析的群論における三大特性を網羅することができた。本研究以前には、それぞれに対応する無限距離空間の特性について定義は与えられていたが、群論に比べると例が豊富だったわけではない。今回の研究で、多くの例を作ることができた。また、群と距離空間という軸、従順性と非従順性という軸の二つの軸で、幅広い研究を行うことができた。
距離空間から Translation C*-環を構成して, 有限次元近似性質を調べる研究課題についても単著論文として成果をまとめることができた。
本研究以前にも、離散群 G の従順性が関数解析的に表現できることは知られていた。その考え方を発展させて離散距離空間 X の大規模構造を作用素環によって表現し, 距離空間の様々な性質を結びつける非自明な定理を発見することができる。距離空間の線形表現ともいうべき環, Translation C*-環 C*u(X) に私は注目した。論文 で私は距離空間の二つの性質
- Property A と
- 作用素ノルムが局在しないこと

が同値であることを示した。この特徴づけは

応用が広く，ネットワークの理論のことばでも解釈できる。新たな特徴づけを生み出すことができた。証明では Translation C*-環 C* u(X) を用いている。このように作用素環論をもちいて距離空間の研究を発展させていくことができる。

粗い距離空間(Coarse Space)について Property A と呼ばれる性質が定義されるが、その概念を整理し、基本的な命題を整理した Preprint は好評で、すでに数多く引用されている。

研究を進めていく中で他分野との思わぬ接点を見出すことができた。量子物理学における確率現象の解析においてある種の離散構造が現れ、その上の線形作用素が重要な意味をもつ。距離空間の関数解析的研究と量子確率論とのつながりを発見できた。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　４　件）

以下四件すべて査読ありの論文。

(1) N. Konno, H. Saigo and H. Sako, ``On a property of the simple random walk on Z", Yokohama Mathematical Journal Vol. 63, 2017.

(2) H. Saigo and H. Sako, ``The Arcsine law and an asymptotic behavior of orthogonal polynomials", Annales de l'Institut Henri Poincare D, 3 (2016), no. 4, 405--427.

(3) M. Mimura, N. Ozawa, H. Sako, Y. Suzuki, ``Group approximation in Cayley topology and coarse geometry, Part III: Geometric property (T)," Algebreaic and Geometric Topology, 15 (2015), no. 2, 1067--1091.

(4) H. Sako, ``Property A and the operator norm localization property for discrete metric spaces", Journal fur die reine und angewandte Mathematik, 690 (2014), 207--216.

〔学会発表〕（計　７　件）

(1) Hiroki Sako, ``Group approximation in Cayley topoloty and coarse geometry," in ``Metric spaces: Analysis, Embeddings into Banach Spaces, Applications," Texas A&M University (アメリカ), 2016 年 7 月.

(2) Hiroki Sako, ``The arcsine law and an asymptotic behavior of orthogonal polynomials", in ``Conference on non-commutative geometry and K-theory", 重慶大学(中国), 2015 年 12 月.

(3) 酒匂宏樹, ``ケーリー位相と粗い幾何学 -- 第三部", 日本数学会秋季総合分科会, 幾何学分科会, 京都産業大学, 2015 年 9 月.

(4) 酒匂宏樹, ``逆正弦法則と直交多項式の漸近挙動", 日本数学会秋季総合分科会, 函数解析分科会, 京都産業大学, 2015 年 9 月.

(5) 酒匂宏樹, ``逆正弦法則と直交多項式の漸近挙動", 実函数函数解析合同シンポジウム, 神奈川大学, 2015 年 9 月.

(6) Hiroki Sako, ``Sequences of finite metric spaces : amenability and connectivity",
in ``Topics in Differencial Geometry and its Discretizations", WPI-AIMR, Tohoku University, 2015 年 1 月.

(7) Hiroki Sako, ``Coarse amenability for discrete metric spaces", Workshop von Neumann Algebras and Ergodic Theory", University of California, Los Angeles (アメリカ), 2014 年 9 月.

６．研究組織
(1)研究代表者
酒匂　宏樹（SAKO, Hiroki）
新潟大学・自然科学系・准教授
研究者番号：７０７０８３３８