

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 29 年 6 月 7 日現在

機関番号：17201

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2014～2016

課題番号：26870646

研究課題名(和文)非線形最小化問題に関連する精度保証付き数値計算法の研究

研究課題名(英文) Numerical Verification Method for Solutions of Nonlinear Programming Problems

研究代表者

木村 拓馬 (Kimura, Takuma)

佐賀大学・工学(系)研究科(研究院)・准教授

研究者番号：60581618

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,000,000円

研究成果の概要(和文)：精度保証付き数値計算法は、与えられた問題の解の存在・一意存在の範囲を丸め誤差の厳密評価を含めて特定する算法である。本課題では非線形最小化問題に関連する精度保証付き数値計算法について研究を行い、次の成果が得られた。

(1) 等式制約付き凸二次計画問題に関連する線形連立方程式に対する数値解の誤差評価法を開発した。
(2) 等式・不等式制約付き凸計画問題の一意解に対する誤差評価法を開発した。(3) 離散化誤差の評価に関連して、放物型方程式の数値解に対する誤差評価式を導出した。

研究成果の一部は、査読付き学術雑誌論文1篇、査読付き国際会議論文2編として既に発表済みである。

研究成果の概要(英文)：In this research, the numerical verification methods for nonlinear programming problems were studied. The following numerical verification methods were proposed. (1) Numerical method for evaluating the accuracy of numerical solutions for symmetric saddle point linear systems whose diagonal blocks of the coefficient matrix are semidefinite matrices. (2) A numerical method for including an optimal solution to a convex programming problems with linear equality and inequality constraints. (3) Optimal order error estimates for a numerical solution of parabolic initial boundary value problems.

研究分野：数値解析

キーワード：数値解析 精度保証付き数値計算法 数理計画 最適化法

1. 研究開始当初の背景

計算機を用いた数値計算は非常に有用であるが、一般に、数値計算によって得られる数値解は誤差を含む。そこで、与えられた問題の解の存在範囲もしくは一意存在の範囲を丸め誤差の厳密評価を含めて特定する、精度保証付き数値計算法が活発に研究されている。しかし、最小化問題（数理計画問題・最適化問題）に特化した精度保証付き数値計算法の研究成果は、等式のみで表現される問題と比して多くない。

最小化問題のうち、線形計画問題については単体法・内点法ともにいくつかの手法が提案されている。しかし、非線形計画問題については、その基礎といえる二次計画問題であっても、特に制約条件が不等式で表現される場合、応募者の知る限りでは決定的な精度保証付き数値計算法は開発されていない。

2. 研究の目的

非線形計画問題に対する精度保証付き数値計算法に関する手法の開発を目的とする。

研究代表者らによる提案手法の拡張・改良と知見により、特に次の2点を目標として研究する。

- (1) 2次計画問題に対する精度保証付き数値計算法の開発。特に、解の存在範囲を成分ごとに計算する手法を開発する。
- (2) 非線形最小化問題に対する精度保証付き数値計算の例を示す。特に、連続問題を離散近似する際に生じる離散化誤差の検証例を示す。

3. 研究の方法

まずは非線形最小化問題の基礎といえる凸2次計画問題を対象として、研究代表者らのこれまでの研究成果を拡張することで、高精度かつ少ない計算量・記憶領域量で数値的検証ができる効率的なアルゴリズムを考案する。これは最適解の存在性については既知であり、行列の性質等を計算機上で数値的に検証することにより、解の一意性を証明するとともに、解の存在範囲を特定することができる。

つぎに、等式と不等式で記述される形式の制約条件が課された最小化問題を扱う。例えば、目的関数や制約条件中のベクトル値関数等が解の近傍で微分可能など、いくつかの条件下では、解の必要条件は等式で表現でき、この等式に対する精度保証付き数値計算法を考える。このとき、微分方程式の形式となる場合は離散近似による有限次元問題の誤差評価と離散化誤差の評価とを組み合わせ

せることで解決する。離散化誤差の評価には中尾の方法の応用を検討する。

数値実験の結果を理論構築にフィードバックし、実用的・効率的なアルゴリズムの開発を目指す。研究の難航時には関係者に助言を求め、必要に応じて共同研究を行う。

4. 研究成果

以下の成果が得られた。

- (1) 等式制約付き凸二次計画問題の解の条件に関連する、鞍点型行列を係数にもつ線形連立方程式に対する数値解の誤差評価法を開発した。

これは行列の固有値の解析に基づく高速な手法であり、精度向上のための二重前処理も考慮している。また、この手法は木村・陳の先行研究の拡張となっており、さらにその計算においては、陳・橋本の誤差評価式が用いる数値を保存して、わずかに数回の演算を追加するような組み替えを行うことで、新しい手法と陳・橋本の手法との両方の誤差評価の値を導出し、精度の良い結果を採用することができる。よって、前述の二つの手法よりも新しい提案手法を用いることをお勧めできる優れた手法といえる。

この成果については、国内学会・研究会等で発表するとともに、査読つき学術誌に論文が掲載受理されている。

- (2) 等式・不等式制約付き凸計画問題の一意解に対する誤差評価法を開発した。

これは大石・田邊らによる線形計画問題に対する手法の拡張にあたる手法であり、主双対内点法による解の条件式についてカントロビッチの定理に基づいた一意解の存在検証・誤差評価ができる。

この成果について査読付き国際会議論文を発表し、現在はフルペーパーの投稿を準備している。

- (3) 離散化誤差の評価と中尾の方法の応用に関連して、最小化問題の形式ではないものの、放物型方程式の数値解に対するオーダー最良な構成的誤差評価を導出した。

これは、研究代表者らによる既存の誤差評価では離散化における刻み幅によっては誤差評価と実際の誤差とのオーダーが合わないことがわかっていたため、右辺ベクトルの微分可能性を仮定することでオーダーを上げ、高精度な評価を導出したものである。

この成果について査読付き国際会議論文を発表し、査読つき学術誌へ論文を投稿中である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 1 件,)

- [1] R. Kobayashi, T. Kimura, S. Oishi,
A method for verifying the accuracy of
numerical solutions of symmetric
saddle point linear systems,
Numerical Algorithms, First Online,
2016, pp.1-19. 査読有り.
DOI: 10.1007/s11075-016-0240-6

[学会発表] (計 11 件)

- (1) 木村拓馬,
最適化問題に関連する精度保証付き数
値計算法について,
第 28 回 RAMP シンポジウム, 新潟大学,
2016-10-13.
第 28 回 RAMP シンポジウム論文集, pp.
57-66.
- (2) R. Kobayashi, T. Kimura, S. Oishi,
A method of verified computation for
convex programming,
17th International Symposium on
Scientific Computing, Computer
Arithmetic and Verified Numerics,
Uppsala University, 2016-09-28.
SCAN 2016 Book of Abstracts, 2016,
pp. 121-122. 査読有り国際会議論文.
http://www.math.uu.se/digitalAssets/499/c_499852-1_1-k_scan2016-book-of-abstracts3.pdf#page=123
- (3) T. Kimura, T. Minamoto, M. T. Nakao,
Optimal order constructive a priori
error estimates for a full discrete
approximation of the heat equation,
17th International Symposium on
Scientific Computing, Computer
Arithmetic and Verified Numerics,
Uppsala University, 2016-09-26.
SCAN 2016 Book of Abstracts, 2016,
pp. 72-73. 査読有り国際会議論文.
http://www.math.uu.se/digitalAssets/499/c_499852-1_1-k_scan2016-book-of-abstracts3.pdf#page=74
- (4) 木村拓馬, 皆本晃弥, 中尾充宏,
放物型方程式の全離散近似解に対する
オーダー最良な構成的誤差評価につい
て,
日本応用数学会, 金沢大学,
2015-09-09.
講演予稿集, 2 pp.

- (5) 小林領, 木村拓馬, 大石進一,
カントロビッチの定理を用いた二次計
画問題の精度保証,
日本応用数学会 2015 年度年会, 金沢
大学, 2015-09-09.
講演予稿集, 2 pp.
- (6) R. Kobayashi, T. Kimura, S. Oishi,
A Numerical Verification Method for
Solutions of Symmetric Saddle Point
Linear Systems,
Joint Seminar on Numerical Analysis at
Niigata University, 新潟大学,
2015-09-03.
- (7) T. Kimura, T. Minamoto, M. T. Nakao,
On the numerical verification for
parabolic initial boundary value
problems,
Joint Seminar on Numerical Analysis at
Niigata University, 新潟大学,
2015-09-02.
- (8) 木村拓馬,
数値計画問題に関連する精度保証付き
数値計算法について,
日本応用数学会三部会連携応用数理
セミナー, 早稲田大学, 2014-12-26.
- (9) 木村拓馬, 小林 領, 大石 進一,
SADDLEPOINT MATRIX EQUATION の近似解
に対する誤差評価について,
応用数学合同研究集会, 龍谷大学,
2014-12-20.
応用数学合同研究集会予稿集, pp.
350-355.
- (10) R. Kobayashi, T. Kimura, S. Oishi,
Validated Solutions for Symmetric
Saddle Point Linear Systems,
The 14th Asia Simulation Conference &
The 33rd JSST Annual Conference:
International Conference on
Simulation Technology, Kitakyushu
International Conference Center,
2014-10-30.
The 33rd JSST Annual Conference:
International Conference on
Simulation Technology, pp. 90-91.
査読有り国際会議論文.
- (11) 小林 領, 木村拓馬, 大石 進一,
対称な鞍点行列を係数に持つ連立一次
方程式に対するブロック対角行列を前
処理に用いた精度保証付き数値計算法,
日本応用数学会 2014 年度年会, 政策
研究大学院大学, 2014-09-03.
講演予稿集, 2 pp.

〔図書〕（該当なし）

〔産業財産権〕（該当なし）

6. 研究組織

(1) 研究代表者

木村 拓馬 (KIMURA, Takuma)

佐賀大学・工学系研究科・准教授

研究者番号：60581618