2版

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２８ 年　 ６ 月 ２１ 日現在

機関番号： ３２６０６
研究種目： 研究活動スタート支援
研究期間： 2014～2015
課題番号： ２６８８００１８
研究課題名（和文） グラフの階層描画におけるSugiyama methodへの厳密アルゴリズムの適用

研究課題名（英文） Exact algorithms for Sugiyama method in layered graph drawings

研究代表者
小林　靖明（Yasuaki，Kobayashi）

学習院大学・付置研究所・助教

研究者番号：６０７３５０８３

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　1,400,000円

研究成果の概要（和文）：本研究ではグラフの階層描画の手法として知られるSugiyama methodに対して厳密アルゴリズムの適用を行った．Sugiyama methodに関してはいくつかのヒューリスティックアルゴリズムを用いた方法が知られているが，厳密アルゴリズムを適用する研究は知られていない．本研究の実験において，交差数を最小化する固定パラメータアルゴリズムが十分に有用であることを明らかにした．また，階層を2層に限定した場合について既存のアルゴリズムよりも高速なアルゴリズムの開発に成功した．

研究成果の概要（英文）：In this research, we apply exact algorithms to a well-known layered graph drawing technique, called Sugiyama method. Although several heuristic approaches are known for this method, no exact approach is known in the literature. Our experimental study shows that the state-of-the-art fixed parameter algorithm for minimizing the number of crossings is substantially applicable to reasonable-sized instances.Moreover, we give a new fixed parameter algorithm for the two-layer case, which improves the running time of the previously known fixed parameter algorithm.

研究分野： 情報学基礎

キーワード： グラフアルゴリズム　厳密アルゴリズム　固定パラメータアルゴリズム　グラフ描画

１．研究開始当初の背景

有向グラフの描画フレームワークとして知られる Sugiyama method[1]は，有向グラフを“階層的”に描画する方法として現在でも広く利用されているもののひとつである．このフレームワークは以下の 4 つの最適化問題から構成される．

(1) 有向グラフから閉路の除去
(2) 頂点の階層割り当て
(3) 辺交差数の最小化
(4) 頂点の座標割り当て

Sugiyama method では，これらの最適化問題を解くことで階層描画を得るが，それぞれの問題は一般には NP 困難である．これまでに Sugiyama method に対する実験的研究はいくつかなされてきたが，そのほとんどはヒューリスティックアルゴリズムが使用されており，ヒューリスティックアルゴリズムに関して実行時間の観点からの比較は行われてきた一方，得られた解の精度による比較はなされて来なかった．

２．研究の目的

本研究では，Sugiyama method に現れる最適化問題に対して厳密アルゴリズムを適用し，解の精度や実行時間の観点から既存のヒューリスティックアルゴリズムと比較を行う．特に解の精度に関してはアルゴリズムを適用したときに得られる辺同士の交差数によって比較する．また，これらを達成することで得られた知見を活かして，理論的な進展も目指す．具体的には以下のように目標を分ける．

(1) 有向グラフから閉路の除去
有向グラフから辺を取り除き閉路を除去する問題は有向フィードバック辺集合問題と呼ばれ，NP 困難問題として知られている．この問題に対する厳密アルゴリズムは十分に実用的であると思われるものは知られておらず，新たなアルゴリズムを考案する必要がある．

(2) 頂点の階層割り当て
この問題に関しては，さまざまな最適化基準が考えられており，それらの基準の優劣は比較不能である．いくつかの基準に関しては多項式時間で計算可能であるが，NP 困難になる場合もある．どのような基準が良いのかを実験を行いながら検査し，本研究に適した最適化基準を選択または新たに作成する．

(3) 辺交差数の最小化
辺交差数の最小化に関しては One-Sided Crossing Minimization と呼ばれる最適化問題を階層的に割り当てられたグラフの各層に対して繰り返し解くことで達成する．このステップは描画全体の中で最も重要なステップして考えられているが，この最適化問題は NP 困難であることが知られている．しかしながら，最近研究代表者らによって理論的および実用的にも高速な厳密アルゴリズムの開発に成功した．このアルゴリズムの効率の良い実装を行い，実際のインスタンスでどれだけのパフォーマンスが出るかを計測する．

(4) 頂点の座標割り当て
本研究では辺交差数の最小化を目指しており，頂点の座標割り当てはこの目的に対して影響を与えないため，特に取り扱わないこととする．

３．研究の方法

(3)の交差数最小化問題に対する厳密アルゴリズムを中心に研究を展開する．これに関しては研究代表者による厳密アルゴリズム[雑誌論文 3]に関して実装を行う．また，既存のヒューリスティックアルゴリズムの実装も行い，描画全体の辺交差数とアルゴリズムの実行時間の観点で比較を行う．辺交差数最小化問題に対するヒューリスティックアルゴリズムとしては，近似率や実行時間の観点から最も定評のある平均法[1]とメディアン法[2]を比較対象とする．また，厳密アルゴリズムとして汎用的に用いられる整数線形計画法の定式化[3]を行い，高性能な数理計画ソルバとして知られる CPLEX を利用したアルゴリズムとも比較を行う．(1)の有向グラフから閉路の除去に関しては，研究代表者らが最近開発したパス幅に対する厳密アルゴリズムの実装[学会発表 1]をヒントにアルゴリズムの開発を行う．(2)の頂点の階層割当に関しては多項式時間可解であるような基準から始めて，どのような最適化基準が良いかを模索していく．

これらの実験で得られた知見を活かして Sugiyama method の各ステップに対する理論的な進展を狙う．特にグラフの階層を 2 に限定した場合の大域的最適解は 2 部交差数 (bipartite crossing number)として知られ，厳密アルゴリズムの視点から研究を行い，理論的な結果を目指す．

４．研究成果

有向グラフから閉路の除去に関してはナイーブな実装から始めて徐々に改良を目指していったが，十分に実用的なサイズのインスタンスに対して最適解を得るようなアルゴリズムにすることができなかった．そのため，すでに閉路が除去された有向グラフに対してアルゴリズムの適用を行った．インスタ

ンスとしてはグラフ描画に関する国際的な団体が運営するウェブサイト(http://www.graphdrawing.org/)に公開されている有向非閉路グラフのベンチマーク DAGmar level graphs を利用した．このベンチマークに含まれるグラフには頂点に対して階層番号が割り振られているが，グラフの辺が隣り合う階層になっているとは限らないため，ダミー頂点を挿入し各辺が隣り合う階層になるようデータに変更を加え，オリジナルの頂点数とダミーとして追加された頂点数の合計が A:3000 頂点以下である 808 のインスタンスと B:5000 頂点以下である 1134 個のインスタンスに関して実験を行った． 1 番目の層から最後の層まですべてに対し，交差数最小化問題を解くアルゴリズムを適用することを 1 順として，(実験 1)B に関しては 1 順実行した場合，(実験 2)A に関しては 10 順実行した場合の実行時間と描画全体の辺交差数を計測した．また，(実験 1)と(実験 2)ともに 1 インスタンスに関して最大 600 秒の実行時間を上限として実験を行った．

(実験 1)結果としては，本研究でのアプローチによって 600 秒以内で実行が終了したインスタンスは 1134 個中 1077 個である一方，実行時間で比較すると，ほどんどのインスタンスに関して平均法やメディアン法が 10 ミリ秒以下で計算するのに対し，本アプローチでは 2500 頂点までのインスタンスに関しては 1～20 秒，それ以上のインスタンスに関しては 100 秒以上時間を要するインスタンスもかなり多かった．その一方で，整数計画法を用いた手法では，1500 頂点を超えるようなインスタンスにおいて，600 秒以内で解を出力することは少なかった．また，交差数に関して言えば，概ね本アプローチが最も小さくなり，続いてメディアン法，平均法と整数計画法が同水準であった．

(実験 2)に関しては,本アプローチでは 808 インスタンス中 803 インスタンスに関して 600 秒以内で計算可能であり，実行時間に関しては平均法・メディアン法に比べてかなり大きいものの，交差数に関しては最も良い値を得ることができた．

グラフの可視性の観点より，あまりにも大きなインスタンスは可視化不能であるという観点から，ほどほどの大きさのインスタンスに対する最適化が最も重要であり，本実験結果はそれらに対して，既存のアルゴリズムより実行時間や解の観点から十分に実用的で良質な描画を与えることがわかった．

理論的な研究の進展としては，グラフを 2 層に限定した場合の厳密アルゴリズムに関していくつか得られた．

ここでは，2 層のグラフ，つまり 2 部グラフが与えられた時に，その 2 部グラフを辺の交差が高々k であるように描画できるかどうかを判定する問題を考える．この問題に関しては，研究期間以前に最適解を変更することなくグラフを小さくする技術(カーネル化)に関して研究を行い，一定の成果を得ていたが，それを理論的にさらに改善することに成功した．この結果を論文にまとめてジャーナルに受理された[雑誌論文 1]．また，この結果をベースにし，辺の交差数が小さいような描画に関する構造を分析することで，研究代表者らが開発した厳密アルゴリズムをさらに高速化することに成功した．具体的には，既存のアルゴリズムが $k^{O(k)}+n^{O(1)}$ 時間で動作するのに対して，新しいアルゴリズムは $2^{O(k)}+n^{O(1)}$ 時間で動作するため，k に関する指数的な実行時間の改善に成功している．本結果に関しても論文にまとめ，ジャーナルに投稿し受理された．

〈引用文献〉

[1]K. Sugiyama, S. Tagawa, M. Toda　:Methods for visual understanding of hierarchical system structures, IEEE Transactions on Systems, Man, Cybernetics 11(2), 109-125, 1981.

[2]P. Eades, N.C. Wormald: Edge crossings in drawings of bipartite graphs. Algorithmica 11(4), 379-403, 1994.

[3]M. Jünger, P. Mutzel: 2-layer straightline crossing minimization: Performance of exact and heuristic algorithms. Journal on Graph Algorithms and Applications 1(1), 1-25, 1997.

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 5 件）

1. Yasuaki Kobayashi, Hisao Tamaki: A faster fixed parameter algorithm for two-layer crossing minimization, Information Processing Letters 116(9), 547-549, 2016.

2. Kenta Kitsunai, Yasuaki Kobayashi, Keita Komuro, Hisao Tamaki, Toshihiro Tano: Computing directed pathwidth in O(1.89n) time, Algorithmica, 75(1), 138-157, 2016.

3. Yasuaki Kobayashi, Hisao Tamaki: A fast and simple subexponential fixed parameter algorithm for one-sided crossing minimization. Algorithmica 72(3), 778-790, 2015.

4. Yasuaki Kobayashi: Computing the pathwidth of directed graphs with small vertex cover. Information Processing Letters 115(2), 310-312, 2015.

5. Yasuaki Kobayashi, Hirokazu Maruta, Yusuke Nakae Hisao Tamaki: A linear edge kernel for two-layer crossing minimization. Theoretical Computer Science 554, 74-81, 2014.

〔学会発表〕(計 5 件)

1. 小林靖明, 玉木久夫: 頂点被覆数の小さいグラフの最適消去木の計算について 情報処理学会研究報告, 第 155 回アルゴリズム研究会, 鹿児島, 2015.

2. Kenta Kitsunai, Yasuaki Kobayashi, Hisao Tamaki : On the pathwidth of almost semicomplete digraphs, The 23rd Annual European Symposium on Algorithms, Patras, Greece, 2015.

3. 橘内謙太, 小林靖明, 玉木久夫: 準完全有向グラフとその一般化に対するパス幅計算について 情報処理学会研究報告, 第 152 回アルゴリズム研究会, 東京, 2015.

4. Yasuaki Kobayashi, Hisao Tamaki: Improved fixed parameter algorithm for two-layer crossing minimization, 情報処理学会研究報告, 第 151 回アルゴリズム研究会, 愛知, 2015.

5. Yasuaki Kobayashi, Keita Komuro, Hisao Tamaki: Search space reduction through commitments in pathwidth computation: an experimental study. The 13th International Symposium on Experimental Algorithms, Copenhagen, Denmark, 2014.

６. 研究組織

(1) 研究代表者

小林 靖明 (KOBAYASHI, Yasuaki)
学習院大学・計算機センター・助教
研究者番号：60735083