

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 9 日現在

機関番号：32657

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2014～2015

課題番号：26887002

研究課題名(和文)半無限旗多様体の幾何学と量子アフィン展開環のレベル・ゼロ表現論

研究課題名(英文)Geometry of semi-infinite flag varieties and level-zero representation theory of quantum affine algebras

研究代表者

石井 基裕 (Ishii, Motohiro)

東京電機大学・情報環境学部・助教

研究者番号：00732463

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,500,000円

研究成果の概要(和文)：1. レベル・ゼロ表現のギャラリー模型：量子アフィン展開環のレベル・ゼロ端ウェイト加群の結晶基底に対する実現を与えるギャラリー模型を導入した。
2. 中心電荷24の正則VOAの構成・分類：宮本の(位数3)軌道体構成法をNiemeier格子VOAに適用して得られる中心電荷24の正則VOAの分類を与えた。

研究成果の概要(英文)：1. A gallery model for level-zero representations: We introduce a gallery model for crystal bases of level-zero extremal weight modules over quantum affine algebras.
2. Construction and classification of holomorphic VOA of central charge 24: We classify holomorphic VOAs of central charge 24 obtained by applying Miyamoto's \mathbb{Z}_3 -orbifold construction.

研究分野：量子アフィン展開環の表現論

キーワード：量子アフィン展開環 半無限Bruhatグラフ

1. 研究開始当初の背景

(1) 量子群の表現論と結晶基底について:

量子群は可解格子模型の研究において対称化可能な Kac-Moody Lie 環の普遍展開環の q-類似として Drinfeld と神保によって独立に導入された非可換かつ非余可換な Hopf 代数である。また Lusztig は Ringel による有限体上の籐の表現論を用いた量子群の構成法を幾何学的に拡張して標準基底と呼ばれる良い性質を満たす基底を発見した。一方、柏原は量子群やその表現のパラメータ $q = 0$ における極限を考察し、そこで組合せ論的に良い振る舞いをする結晶基底と呼ばれる基底を発見した。結晶基底は標準基底の $q = 0$ の特殊化として得られるという意味でこれらの基底は互いに密接に関係している。柏原は結晶基底とその上に作用する柏原作用素に関する組合せ論的性質を抽象化した柏原結晶の概念を導入した。

これらの基底の理論は代数群・Lie 環の表現論において新たな視点を提供するとともに、可積分系などへの重要な応用を与える。特に、結晶基底は量子群の表現論と組合せ論とを密接に結びつけ、例えば対称群や一般線形群の表現論に現れる Young 図形の組合せ論的構造に柏原結晶の構造が入ることが分かり、対応する一般線形群の表現の結晶基底と柏原結晶として同型になることが分かる。

以上のような背景もあり、結晶基底の発見以来、結晶基底を持つ量子群の表現の構造を調べたり他分野に応用したりするために、まずその結晶基底の構造を Young 図形のような組合せ論的構造を利用して明示的に実現することが基本的な問題の一つとなった。

(2) Lakshmibai-Seshadri パス模型について:

量子群の可積分最高ウェイト加群は結晶基底を持つ最も基本的な表現である。Littelmann は Lakshmibai-Seshadri (LS) パスとそれに作用するルート作用素を導入し、LS パスの集合の上にルート作用素を柏原作用素とする柏原結晶の構造を定義した。また柏原と Joseph はそれが可積分最高ウェイト加群の結晶基底と柏原結晶として同型になることを独立に証明した。LS パスは対称化可能な Kac-Moody Lie 環の Weyl 群の元の Bruhat 半順序に関する減少列であってある組合せ論的性質を満たすものとして定義される。従って上記の結果は可積分最高ウェイト加群の結晶基底が Weyl 群の組合せ論的構造を用いて明示的に実現されることを意味する。

(3) 量子アフィン展開環のレベル・ゼロ表現論について:

アフィン Lie 環とはアフィン型ルート系に付随する Kac-Moody Lie 環である。これは有限次元複素半単純 Lie 環に値をとるループ代数の中心拡大として明示的に構成される無限次元の Lie 環であり、2 次元共形場理論な

どの可積分系において重要な役割を果たす。アフィン Lie 環に付随する量子群を量子アフィン展開環と呼ぶ。

量子アフィン展開環のレベル・ゼロ表現論とは量子アフィン展開環の商代数である量子ループ代数(ループ代数に付随する量子群)の作用を経由するような表現のことである。特に量子アフィン展開環の有限次元表現はこのクラスに属し、可積分系との関係から幅広く研究されている。有限次元のレベル・ゼロ表現の中でレベル・ゼロ基本表現、及びそれらのテンソル積の形をした表現が最も基本的であり、これらは結晶基底を持つことが知られている。また、レベル・ゼロ端ウェイト加群(又は大域的 Weyl 加群、普遍的標準加群)と呼ばれる無限次元の可積分加群は結晶基底を持ち、有限次元レベル・ゼロ表現を調べる上で重要な役割を果たす。

(4) LS パス模型、LS ギャラリー模型、Mirkovic-Vilonen サイクル、Mirkovic-Vilonen 多面体について:

複素簡約代数群(複素簡約 Lie 環)の(有限次元)表現論とアフィン Grassmann 多様体の幾何学とを結びつける幾何学的佐武対応の組合せ論的な精密化として、アフィン Grassmann 多様体の中の Mirkovic-Vilonen (MV) サイクルと呼ばれる代数的サイクルによる有限次元既約表現の結晶基底に対する幾何学的な実現が得られる。また、アフィン Grassmann 多様体への極大トラス(の実型)の Hamilton 的作用に関する MV サイクルのモーメント凸多面体を MV 多面体と呼び、これらも結晶基底に対する組合せ論的な実現を与える。Littelmann らは LS パス模型を変形した LS ギャラリー模型を導入し、それを經由することによって、LS パス模型とアフィン Grassmann 多様体の幾何学的構造との関係を記述し、結果として LS パス模型と MV サイクル(MV 多面体)との間の柏原結晶としての同型対応を与えた。

2. 研究の目的

(1) 量子アフィン展開環のレベル・ゼロ端ウェイト加群やレベル・ゼロ基本表現などの基本的なレベル・ゼロ表現の結晶基底を組合せ論的に実現することを目的とする。特に、Littelmann の LS パス模型は一般にはレベル・ゼロ表現の結晶基底とは柏原結晶として同型にはならないことが知られているので、LS パス模型に替わる新たな実現方法を与えることを目的とする。

(2) レベル・ゼロ表現の結晶基底の組合せ論的な実現が得られたとして、その背後にある幾何学的構造を解明することを目的とする。特に、幾何学的佐武対応の類似の対応を考察し、レベル・ゼロ表現論において MV サイクル・多面体の理論を構築することによって、幾何学的背景に対する説明を与えたい。

3. 研究の方法

(1) 研究集会などに参加し、関連する研究の情報収集を行うとともに、関係する研究分野の研究者と議論を行う。また、得られた研究結果を研究集会で発表する。

(2) 他の研究機関へ出張し、関連する研究者や共同研究者と議論を行い、問題点やアイデアを共有するなど研究内容を整理するとともに、理解を深める。

(3) 関連する研究分野やその周辺の分野に関する書籍を購入し、情報収集を行う。そして、新たに得られた知識を研究に活用し発展させる。

4. 研究成果

(1) 量子アフィン展開環のレベル・ゼロ端ウェイト加群の結晶基底の実現(雑誌論文, 学会発表,):

Lenart は A 型の量子アフィン展開環のレベル・ゼロ基本表現のテンソル積の次数付指標が Macdonald 多項式を特殊化したものに一致することを示した。そこでは付随する結晶基底を量子 Bruhat グラフから構成されるある組合せ論的構造に対応させることが重要な役割を果たしている。ここで量子 Bruhat グラフとは有限 Weyl 群に付随する Bruhat グラフを拡張した有向グラフであり、旗多様体の(小さい)量子コホモロジー環の環構造に現れる組合せ論的構造を抽出することによって Brenti らによって導入されたものである。上記の Lenart による対応は LS パス模型による結晶基底の実現に類似しており、レベル・ゼロ表現に対する LS パス模型の理論の拡張の存在を示唆するものである。

雑誌論文 では、量子 Bruhat グラフのアフィン Weyl 群への拡張である半無限 Bruhat グラフを用いて、LS パス模型の拡張である半無限 LS パス模型を導入し、それが量子アフィン展開環の端ウェイト加群の結晶基底を実現することを示した。半無限 LS パスはアフィン Weyl 群の元の半無限 Bruhat 半順序に関する減少列であってある組合せ論的な条件を満たすものとして定義される。従って上記の結果は端ウェイト加群の結晶基底がアフィン Weyl 群の組合せ論的構造を用いて明示的に実現されることを意味する。

(2) 半無限 LS ギャラリー模型について(学会発表,):

LS パス模型が LS ギャラリー模型を経由することによって MV サイクルと対応していたように、半無限 LS パス模型に対する幾何学的な対応物を考察する目的で、LS ギャラリー模型の拡張として半無限 LS ギャラリー模型を導入した。これは半無限 LS パス模型を変形したものであり、これらも結晶基底の組合せ論的実現を与えるものである。また、半無限 LS ギャラリー模型に作用するルート作用

素は二重アフィン Weyl 群の作用を用いて記述される。

LS ギャラリー模型における議論と同様に考察すると、半無限 LS ギャラリー模型においてアフィン Grassmann 多様体の役割を演じる幾何学的対象は Feigin-Frenkel によって導入された半無限旗多様体であることが分かる。そして MV サイクルの類似物を半無限旗多様体の中に導入することができる。それらの詳しい性質を調べることは今後の課題である。

(3) Z_3 -軌道体構成法の応用について(雑誌論文,):

モンスター単純群をその自己同型群に持つムーンシャイン頂点作用素代数 (VOA) を含むクラスに中心電荷 24 の正則 VOA がある。このクラスに属する VOA の分類問題は未解決であり VOA の構造論における基本的な問題の一つとなっている。宮本による Z_3 -軌道体構成法により Niemeier 格子 (VOA) とその上の位数 3 の自己同型であってある条件を満たすものから中心電荷 24 の正則 VOA が構成される。そこで Z_3 -軌道体構成法が適用できるような Niemeier 格子の自己同型を全て分類し、実際に Z_3 -軌道体構成法を適用して得られる VOA を調べ、付随する Lie 環構造を全て求めた。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 3 件)

Motohiro Ishii, Satoshi Naito, and Daisuke Sagaki, Semi-infinite Lakshmibai-Seshadri path model for level-zero extremal weight modules over quantum affine algebras, Adv. Math. 290 (2016), 967-1009, 査読有り. DOI:10.1016/j.aim.2015.11.037

Motohiro Ishii, Daisuke Sagaki, and Hiroki Shimakura, Automorphisms of Niemeier lattices for Miyamoto's Z_3 -orbifold construction, Math. Z. 280 (2015), 55-83, 査読有り. DOI:10.1007/s00209-015-1413-z

Motohiro Ishii, Demazure character formulas for generalized Kac-Moody algebras, Comm. in Alg. 43 (2015), 2785-2801, 査読有り. DOI:10.1080/00927872.2014.904327

[学会発表](計 5 件)

石井基裕, 量子ループ代数の組合せ論的表現論, 数理科学談話会, 室蘭工業大学(北海道・室蘭市), 2016年1月20日.

Motohiro Ishii, A combinatorial realization of Weyl modules over quantum affine algebras, RIMS Camp-style seminar “Diagram algebras and topology”, ホテルスポーツロッジ 糸満 (沖縄県・糸満市), 2015年8月3日.

石井基裕, アフィングラスマン多様体入門, FMSP チュートリアルワークショップ「アフィングラスマン多様体とその周辺」, 東京大学玉原国際セミナーハウス (群馬県・沼田市), 2015年8月18, 19日.

Motohiro Ishii, A gallery model for level-zero representations of quantum affine algebras, Shanghai Workshop on Representation Theory, Tongji University (Shanghai, China), 2014年12月8日.

石井基裕, Path and gallery models for level-zero representations of quantum affine algebras, RIMS 研究集会「有限群とその表現, 頂点作用素代数, 代数的組合せ論の研究」, 京都大学 (京都府・京都市), 2014年12月17日.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

石井 基裕 (ISHII, Motohiro)
東京電機大学・情報環境学部・助教
研究者番号: 00732463