

**科学研究費助成事業 研究成果報告書**

平成 28 年 6 月 22 日現在

機関番号：12401  
研究種目：研究活動スタート支援  
研究期間：2014～2015  
課題番号：26887008  
研究課題名(和文) New Frontiers in Kinetic Equation Theory

研究課題名(英文) New Frontiers in Kinetic Equation Theory

## 研究代表者

BEZ NEAL (BEZ, Neal)

埼玉大学・研究機構研究企画推進室・准教授

研究者番号：30729843

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,800,000円

研究成果の概要(和文)：本研究は調和解析の手法で運動輸送方程式の理論を大幅に発展させた。特に調和解析のフーリエ変換の制限問題を発展するために用いた手法を応用した。更に同じような手法で、量子力学のシュレーディンガー方程式と古典力学の波動方程式が含まれた方程式のクラスの理論を発展させた。

偏微分方程式、調和解析および幾何解析の研究交流をさらに促進するために、埼玉大学で国際的な学会を行った。この学会は大成功し、新たに重要な研究課題のきっかけとなった。

研究成果の概要(英文)：Significant progress on the fundamental theory of the kinetic transport equation has been obtained through the use of techniques from harmonic analysis. In particular, techniques developed in connection with the Fourier restriction conjecture were applied. Additionally, using similar techniques, this research has also pushed forward the theory of another class of equations, including the Schrodinger equation from quantum mechanics and the wave equation from classical physics.

To foster greater interaction between partial differential equations research with harmonic analysis and geometric analysis, an international conference was organised at Saitama University. The conference was a great success, and was the catalyst for new developments in several important research topics.

研究分野：偏微分方程式

キーワード：運動輸送方程式 分散型方程式 波動方程式 時空間評価式

## 1. 研究開始当初の背景

(1) かつて土星の環は固体だと思われていた。土星の環の物体の形を数学的に説明するために、1859年に James Clerk Maxwell は有名な論文「On the Stability of the Motion of Saturn's Rings」を發表し、物体の形状はたくさんの粒子が自主的に土星の軌道を回って現れるという予想を發表した。Maxwell の論文から土星の環が「fluid ring (液体の輪)」であるという理論が浮上してきた。数年後 Ludwig Boltzmann はこの過程を形式化し、ボルツマン方程式という現代では非常に有名な方程式を導出した。この方程式は運動論的方程式の一つの例である。

(2) 運動論的方程式は、粒子の速度分布関数の振る舞いをモデル化する方程式である。現在、運動論的方程式は天体物理学だけではなく工学 (航空宇宙工学・原子力工学)、生物学 (走化性・免疫学)、社会学などで見ることができ。一般的に、これらの分野から浮上する運動論的方程式は非線形方程式である。しかしほぼ全ての非線形運動論的方程式の根底には、線形運動輸送方程式という基本的な運動論的方程式が深く関わりをもつ。従って、線形運動輸送方程式の数学的な理論について多くの論文が發表された。特に、運動輸送方程式の解の velocity average (積分平均速度) の性質についての研究は本質的に重要である。

## 2. 研究の目的

(1) 本研究の主な目的は現在の調和解析と幾何解析の手法で運動論的方程式の理論を大幅に発展させることである。

(2) 調和解析のフーリエ変換の制限問題と幾何解析の掛谷予想を発展させるために用いた手法を運動輸送方程式の velocity average の評価式に応用することが目的である。その velocity average 評価式に基づ

き、様々な分野から非線形運動論的方程式の解の性質が得られる。

(3) 長期的な本研究の目的は運動論的方程式の理論、調和解析、幾何解析の研究技術交換を強化することである。

## 3. 研究の方法

(1) 運動輸送方程式の解の velocity average を考え、速度の変数の定義域を球面に限定する。例えば、光子の現象を考えるとそれは自然な定義域である。速度の定義域が球面の場合は、velocity average を時空間 hyperbolic Sobolev 空間で評価した。

(2) 調和解析から cone multiplier という作用素の理論を使用した。特に、Bourgain-Demeter (Annals of Mathematics, 2015) により最近証明された cone (円錐) における decoupling 定理を用いた。

(3) Keel-Tao (American Journal of Mathematics, 1998) の波動方程式の Strichartz 評価式を応用した。

(4) 球面上の解析をするため、調和解析の古典的な結果 Funk-Hecke 定理と呼ばれる定理を用いた。

## 4. 研究成果

(1) 初期データを  $L^2$  関数と考える。その場合には velocity average の hyperbolic Sobolev 空間での評価式と調和解析からの cone multiplier 作用素の直接関係を示し、cone に関してフーリエ変換の制限評価式に基づき、当該な cone multiplier 作用素の評価式を証明した。その関係は本研究で初めて証明され、Bournaveas-Perthame (Journal de Mathematiques Pures et Appliquees, 2001) や Bournaveas-Gutierrez (Revista Matematica Iberoamericana, 2007) により

証明された hyperbolic Sobolev 空間の評価式を大幅に発展させた。

(2) Bourgain-Demeter の decoupling 定理に基づき、ベゾフ空間の初期データにおける一般化という結果を証明した。これは Bourgain-Demeter の革新的な証明が初めて適応された応用例となった。

(3) Funk-Hecke 定理に基づき、 $L^2$  hyperbolic Sobolev space の評価式の最適定数を得た。本研究により初めて Funk-Hecke 定理が運動輸送方程式の理論に応用され、その方程式の評価式の最適定数の研究が開始された。結果 (1)-(3) は査読中の論文「Estimates for the kinetic transport equation in hyperbolic Sobolev spaces」(著者名 Jonathan Bennett, Neal Bez, Susana Gutierrez, Sanghyuk Lee) が含まれている。

(4) 本研究の主な分野は運動論的方程式であるが、上記の手法を用いて様々な他分野の理論を発展させた。例えば、Funk-Hecke の定理より分散型方程式の解の Kato smoothing 評価式の最適定数の研究し、シュレーディンガー方程式の Mizohata-Takeuchi 予想についての結果も得られた。

(5) 偏微分方程式、調和解析および幾何解析の研究交流をさらに促進するために、下記の埼玉大学で国際的な学会を行った。この学会は大成功し、新たに重要な研究課題のきっかけとなった。

2016 年 3 月 2 日～4 日 Harmonic Analysis, Geometric Analysis and PDE Workshop 研究集会 (於 埼玉大学 (埼玉県さいたま市))

5 . 主な発表論文等  
(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計 5 件)

Neal Bez, Shuji Machihara, Mitsuru Sugimoto, Extremisers for the trace theorem on the sphere, Mathematical Research Letters, 印刷中。(査読有)

Neal Bez, Chris Jeavons, Tohru Ozawa, Hiroki Saito, A conjecture regarding optimal Strichartz estimates for the wave equation, Trends in Mathematics, 印刷中。(査読有)

Neal Bez, Chris Jeavons, Tohru Ozawa, Some sharp bilinear space-time estimates for the wave equation, Mathematika, Vol. 62 (2016), pp. 719-737. (査読有)  
DOI:10.1112/S0025579316000012

Neal Bez, Hiroki Saito, Mitsuru Sugimoto, Applications of the Funk-Hecke theorem to smoothing and trace estimates, Advances in Mathematics, Vol. 285 (2015), pp. 1767-1795. (査読有)  
DOI:10.1016/j.aim.2015.08.025

Neal Bez, Mitsuru Sugimoto, Optimal forward and reverse estimates of Morawetz and Kato-Yajima type with angular smoothing index, Journal of Fourier Analysis and Applications, Vol. 21 (2015), pp. 318-341. (査読有)  
DOI:10.1007/s00041-014-9371-0

〔学会発表〕(計 13 件)

Neal Bez, Applications of the Funk-Hecke theorem to smoothing and trace estimates, 2016 年 2 月 15 日 Harmonic Analysis and its Applications in Matsumoto, Winter 2016 研究集会 (於 信州大学 (長野県松本市)) (招待講演)

Neal Bez, Some sharp bilinear estimates for the wave equation, 2015 年 12 月 17 日

Workshop on Hyperbolic and Dispersive PDEs in Sendai 研究集会 (於 東北大学青葉山キャンパス(宮城県仙台市)) (招待講演)

Neal Bez, Recent developments in the heat-flow semigroup interpolation method, 2015 年 10 月 1 日～3 日 Workshop on Fundamental Problems in Mathematical and Theoretical Physics 研究集会 (於 早稲田大学西早稲田キャンパス(東京都新宿区)) (招待講演)

Neal Bez, Some sharp bilinear estimates for the wave equation, 2015 年 8 月 5 日 10<sup>th</sup> ISAAC Congress (Nonlinear Partial Differential Equations Session) 研究集会 (於 University of Macau (Macau)) (招待講演)

Neal Bez, Consequences of the Funk-Hecke theorem for smoothing and trace estimates, 2015 年 8 月 4 日 10<sup>th</sup> ISAAC Congress (Harmonic Analysis and PDEs Session) 研究集会 (於 University of Macau (Macau)) (招待講演)

Neal Bez, The Mizohata-Takeuchi conjecture, smoothing estimates and trace theorems, 2015 年 7 月 31 日 Analysis Seminar (於 The Chinese University of Hong Kong (Hong Kong)) (招待講演)

Neal Bez, The Mizohata-Takeuchi conjecture, smoothing estimates and trace theorems, 2015 年 6 月 25 日 Applied Mathematical Seminar (於 東北大学青葉山キャンパス(宮城県仙台市)) (招待講演)

Neal Bez, Some inequalities from geometric and harmonic analysis via

induction-on-scales, 2015 年 3 月 22 日日本数学会 2015 年度年会特別講演 (於 明治大学駿河台キャンパス(東京都千代田区)) (招待講演)

Neal Bez, Some applications of the Funk-Hecke theorem to smoothing and null form estimates, 2015 年 3 月 17 日 Analysis Seminar (於 Seoul National University (South Korea)) (招待講演)

Neal Bez, Some applications of the Funk-Hecke theorem, 2015 年 3 月 5 日 Analysis Seminar (於 University of Birmingham (UK)) (招待講演)

Neal Bez, Lectures on the linear and multilinear restriction conjectures, 2014 年 12 月 25 日～27 日調和解析セミナー研究会 (於 ホテルヒルズサンピア山形 (山形県山形市)) (招待講演)

Neal Bez, Multilinear Radon-like transforms, 2014 年 12 月 20 日微分方程式の総合的研究集会 (於 京都大学吉田キャンパス(京都府京都市)) (招待講演)

Neal Bez, Multilinear restriction estimates and Radon-like transform, 2014 年 12 月 3 日 さいたま数理解析セミナー 研究集会 (於 大宮埼玉大学のサテライトキャンパス(埼玉県さいたま市)) (招待講演)

〔図書〕(計 0 件)

〔産業財産権〕  
出願状況 (計 0 件)

取得状況 (計 0 件)

〔その他〕

ホームページ：

<http://www.rimath.saitama-u.ac.jp/lab.jp/Nealbez/Main.html>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

BEZ NEAL (BEZ, Neal)

埼玉大学・研究機構研究企画推進室・准教授

研究者番号：30729843

### (2) 研究分担者

( )

研究者番号：

### (3) 連携研究者

( )

研究者番号：

### (4) 研究協力者

Bennett Jonathan (BENNETT, Jonathan)  
University of Birmingham

Gutierrez Susana (GUTIERREZ, Susana)  
University of Birmingham

Jeavons Chris (JEAVONS, Chris)  
Waseda University

Lee Sanghyuk (LEE, Sanghyuk)  
Seoul National University

Machihara Shuji (MACHIHARA, Shuji)  
Saitama University

Ozawa Tohru (OZAWA, Tohru)  
Waseda University

Saito Hiroki (SAITO, Hiroki)  
Kogakuin University

Sugimoto Mitsuru (SUGIMOTO, Mitsuru)  
Nagoya University