様　式　C－１９、F－１９、Z－１９　(共通)

科研費
KAKENHI

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

平成 ２８ 年　 ６ 月 １４ 日現在

機関番号：１３６０１
研究種目：研究活動スタート支援
研究期間：2014～2015
課題番号：２６８８７０１７

研究課題名（和文）非線形波動方程式の幾何学的対称性と解の構造

研究課題名（英文）Relations between properties of solutions and geometric symmetry of solutions for nonlinear wave equations

研究代表者
岡本　葵（OKAMOTO, Mamoru）

信州大学・学術研究院工学系・助教

研究者番号：４０７３５１４８

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　1,900,000円

研究成果の概要（和文）：研究成果は以下の3つである．（1）空間1次元Chern-Simons-Dirac方程式系の初期値問題の適切性をSobolev空間の枠組みで研究し，適切となる初期値のSobolev指数を完全に分類した．また，適切となるSobolev指数の範囲が非凸となることを発見した．（2）非線形4階Schrodinger方程式の初期値問題に取り組み，尺度臨界Sobolev空間において時間大域的適切性及び自由解への散乱を示した．（3）Thirringモデルを含むより一般の非線形項をもつDirac方程式系の初期値問題について，適切及び非適切を考察した．

研究成果の概要（英文）：The research results are as follows. (1) We proved the well-posedness and ill-posedness of the Cauchy problem for the one dimensional Chern-Simons-Dirac system. We completely determined the range, which is not convex, of Sobolev regularity to be well-posed. (2) We proved the global well-posedness and scattering for the fourth order nonlinear Schrodinger equation. (3) We obtain the well-posedness and ill-posedness results of the Cauchy problem for the generalized Thirring model.

研究分野：数物系科学

キーワード：非線形波動方程式　初期値問題の適切性　フーリエ制限ノルム法　解の散乱

１．研究開始当初の背景

非線形偏微分方程式では，その非線形性のために一般的な解析が困難であり，解の存在さえも非自明な場合も多い．そのため，初期値問題の適切性が非線形偏微分方程式における解析で基本的でかつ重要な問題となる．また，正則性が低い空間においては，非線形効果が顕著に表れ，個々の方程式が持つ特性をより精密に取り扱うことが可能となる．複雑な非線形効果を有する方程式においては，物理的に自然なクラスであっても非線形効果が無視できなくなり，解の存在等を証明することが困難である．そのような低い正則性における解析，とりわけ非線形波動・分散型方程式の弱解のクラスにおける適切性の研究は，Bourgain や Klainerman and Machedon により導入された Fourier 制限ノルム法により飛躍的に進歩した．また，Christodoulou や Klainerman により，零形式と呼ばれる特殊な非線形項が考察された．これらにおいては，特異性が強く表れる部分が相殺され，強い非線形相互作用が消える．さらに，この強い非線形相互作用が消えるという特性を抜き出し，零構造と呼ばれる非線形効果についても研究が進んでおり，現在では，個々の非線形項に特有の現象を解明する研究が行われている．また，Klein-Gordon 方程式の非相対論的極限として Schrödinger 方程式が表れるなど，非線形分散型方程式と波動方程式との間には密接な関係があり，波動方程式で培われた手法が分散型方程式に援用可能である場合などもある．そのため，非線形波動方程式と非線形分散型方程式の研究は独立なものではなく，相互に関係しあいながら発展を続けている．

２．研究の目的

個々の非線形項に着目する際，方程式が有する幾何学的対称性と解の特異性との間に密接な関係があることが近年の研究により確認されている．この事実を踏まえ，本研究では，非線形波動方程式の幾何学的対称性と解の構造との関係を調べ，それらの関連を解明することを目指す．また，非線形波動方程式と関係する非線形分散型方程式も研究対象とし，背後にある原理を探ることを目的とする．特に，方程式が有する構造に着目して，より低い正則性における初期値問題の適切性の解析を行い，時間大域的な解の存在や解の挙動について調べることを目標とした．低い正則性における適切性の研究においては，技術的な問題で，適切となる初期値の空間を広げることが困難であることもある．そして，技術的な困難だけではなく，非線形項の強い相互作用が発生して，より広い空間における適切性が得られないことも起こり得る．そこで，適切性が得られた場合には，その最良性について調べ，適切となる空間をより広げることが本質的に不可能かどうかを解明し，初期値問題が適切となる空間を分類することも試みる．

３．研究の方法

非線形波動・分散型方程式の初期値問題の適切性（解の存在，一意性，および初期値に関する連続依存性が成立すること）に関する研究においては，Fourier 制限ノルム法が非常に威力を発揮することが先行研究で示されているため，本研究においても，Fourier 制限ノルムを用いて，Sobolev 空間における適切性の解明を行う．また，適切性が得られた空間をより広げることが本質的に不可能かどうかを検証し，適切性の結果の最良性について考察する．具体的には，Chern-Simons-Dirac 方程式系や 4 階 Schrödinger 方程式などについて初期値問題が適切となる初期値の Sobolev 空間を調べる．特に，非線形項の構造に着目した解析を行う．解の漸近挙動については，通常の Fourier 制限ノルム空間では解析が難しいと思われる．実際，Fourier 制限ノルム法では，時間に関する Sobolev 空間を用いて関数空間が定義されており，時間に関して連続な空間の部分空間とみなすために，Sobolev の埋め込み定理を利用していた．その際，線形部分が持つ平滑化効果を若干損失するという欠点があった．そこで，時間に関しては，Sobolev 空間の代わりに 2 乗有界変動な関数空間をとることにより，線形部分の平滑化効果を損失なく扱えるようにする．

４．研究成果

(1)空間１次元 Chern-Simons-Dirac 方程式系に関する先行研究では，いわゆる逐次近似法により適切性が証明されていた．逐次近似法を用いて適切性を得た場合には，解写像が滑らかになることが知られている．先行研究で得られていた Sobolev 指数の範囲以外では解写像が局所一様連続ではないことを示し，逐次近似法を用いる限り先行研究で得られていた結果が最良であることを証明した（論文④）．また，解写像が局所一様連続ではない場合であっても，強い相互作用が発生する部分を抜き出して，相互作用が強い部分とそれ以外とに分けて解析を行うことにより，適切及び非適切となる初期値の Sobolev 指数を完全に決定した（論文①）．特に，適切となる指数の範囲が非凸集合となることを示した．適切となる範囲が非凸となる結果は今まで知られておらず，興味深いものである．この非凸となる部分では，Chern-Simons 場の非線形項が良い効果を持っており，時間発展により，Chern-Simons 場は初期値よりも正則性が上がることを発見した．この事実と，ゲージ変換とを用いて，方程式を扱い易いものに書き直して，強い特異性だけを抜き出して扱うことに成功した．また，尺度臨界指数 Sobolev 空間においても非適切となることを得た．尺度臨界 Lebesgue 空間においては適切性が成立することが知られており，尺度臨界な空間

であっても，Sobolev空間とLebesgue空間とで差異が生じることを示した．

(2)非線形4階Schrödinger方程式の初期値問題において，時間大域的適切性及び解が自由解に散乱することを示した（論文③）．時間局所的適切性の証明ではFourier制限ノルムが威力を発揮する．しかし，通常のFourier制限ノルム空間では，時間に関するSobolev空間を考えているために，線形部分が持つ作用を若干損失する欠点がある．そこで，大域的適切性や散乱を得るため，空間をより精密化した時間に関して2乗有界変動関数の空間を利用した．線形方程式の平滑化効果の一つの表れであるStrichartz評価式及びそれを双線形に拡張したものを，上述の2乗有界変動関数空間の枠組みに拡張した．また，非線形項は，未知関数の複素共役にのみ依存するものを考え，相互作用により振動効果が消える共鳴現象が発生しないものを扱った．線形部分の効果と非共鳴性とを合わせ，解の自由解への散乱を導いた．本研究で扱った非線形項は，相互作用により共鳴現象が起こらないという良い性質を持つものであった．より複雑な非線形項における解析においても，一部では非共鳴な部分が表れるために，この研究で培った手法が活用できると期待される．

(3)Thirringモデルを含むより一般の非線形項をもつDirac方程式系における適切性及び非適切性の解析を行った（論文②）．Thirringモデルでは，電荷クラスと呼ばれる空間における時間大域的適切性が先行研究で証明されており，本研究において，その結果が最良であることを示した．また，非線形項に良い構造がある場合には，尺度臨界指数Sobolev空間まで適切性が得られ，そうでない場合には，適切となるSobolev指数に尺度臨界指数よりも大きな下限あることを示した．さらに，非線形項が滑らかではない場合には，正則性の高い空間においても非適切となることを示した．非線形項が滑らかでない場合には，逐次近似法を適用する際に困難が生じることは以前から指摘されていた．本結果では，単に逐次近似法の適用が難しいという技術的な困難さだけではなく，実際に非適切になることまで示しており，適切性を考える際に非線形項の滑らかさは技術的な要請ではなく，本質的なものであることを解明した．

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　４件）

① Shuji Machihara and Mamoru Okamoto, Sharp well-posedness and ill-posedness the Chern-Simons-Dirac system in one dimension. Int. Math. Res. Not., 2016 (6), 1640-1694.（査読有） doi:10.1093/imrn/rnv160

② Hyungjin Huh, Shuji Machihara, and Mamoru Okamoto, Well-posedness and ill-posedness of the Cauchy problem for the generalized Thirring model, Differential Integral Equations 29, 5-6, 2016, 401-420.（査読有） http://projecteuclid.org/euclid.die/1457536884

③ Hiroyuki Hirayama and Mamoru Okamoto, Well-posedness and scattering for fourth order nonlinear Schrödinger type equations at the scaling critical regularity, Commun. Pure Appl. Anal. 15, no. 3, 2016, 831-851.（査読有） doi:10.3934/cpaa.2016.15.831

④ Shuji Machihara and Mamoru Okamoto, Ill-posedness of the Cauchy problem for the Chern-Simons-Dirac system in one dimension, Journal of Differential Equations 258 (2015), 1356-1394.（査読有）doi:10.1016/j.jde.2014.10.020

〔学会発表〕（計１１件）

① 岡本葵，町原秀二，Hyungjin Huh，空間1次元非線形Dirac方程式の適切性と非適切性，日本数学会年会，2016年3月19日，筑波大学

② 岡本葵，空間1次元Chern-Simons-Dirac方程式の初期値問題の適切性について，波動セミナー，2016年2月8日，北海道大学

③ 岡本葵，非線形項に微分を含む非線形Schrödinger方程式の初期値問題のほとんど確実な適切性について，RIMS共同研究「偏微分方程式に附随する確率論的問題」2015年12月11日，京都大学

④ 岡本葵，町原秀二，空間1次元Dirac-Klein-Gordon方程式の初期値問題の非適切性について，実解析学シンポジウム2015，2015年10月23日，東邦大学

⑤ 岡本葵，Random data Cauchy problem for the nonlinear Schrödinger equation with derivative nonlinearity，NLPDEセミナー，2015年10月16日，京都大学

⑥ 平山浩之，岡本葵，スケール臨界指数における4階非線形 Schrödinger 方程式の適切性と解の散乱について，日本数学会秋季総合分科会，2015年9月15日，京都産業大学

⑦ 平山浩之，岡本葵，確率化された初期値をもつ4階非線形 Schrödinger 方程式の初期値問題の適切性，日本数学会秋季総合分科会，2015年9月15日，京都産業大学

⑧ 岡本葵，次元縮約された Chern-Simons-Dirac 方程式の適切性，RIMS 共同研究「線形および非線形分散型方程式の研究」，2015年5月19日，京都大学

⑨ 岡本葵，空間１次元 Chern-Simons-Dirac 方程式の初期値問題の適切性，スペクトル・散乱前橋シンポジウム， 2015年1月11日，前橋工科大学

⑩ 岡本葵，Sharp well-posedness and ill-posedness for the Chern-Simons-Dirac system in one dimension，NLPDE セミナー，2014年12月12日，京都大学

⑪ 岡本葵，町原秀二，空間１次元 Chern-Simons-Dirac 方程式の初期値問題の非適切に対する注意，日本数学会秋季総合分科会，2014年9月28日，広島大学

６．研究組織

(1)研究代表者

岡本　葵（OKAMOTO, Mamoru）
信州大学・学術研究院工学系・助教
研究者番号：40735148