

科学研究費助成事業 研究成果報告書

平成 28 年 6 月 20 日現在

機関番号：52501

研究種目：研究活動スタート支援

研究期間：2014～2015

課題番号：26887045

研究課題名(和文)可証性述語の解析に基づく形式的証明可能性の研究

研究課題名(英文)Research of formal provability by means of the analysis of provability predicates

研究代表者

倉橋 太志(Kurahashi, Taishi)

木更津工業高等専門学校・その他部局等・講師

研究者番号：10738446

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 1,900,000円

研究成果の概要(和文)：可証性述語の性質を調べることによって、形式的体系における証明や証明可能性に関する理解を深める研究を行った。

1. 構文論的研究：第一・第二不完全性定理を算術的に定義可能な理論に対して拡張した(神戸大学の菊池誠准教授との共同研究)。また、理論が Σ_n 選言特性をもつという概念を定め、この概念が理論の証明可能性の研究においてよい指標となり得ることを示した。
2. 意味論的研究：算術の超準モデルにおける証明構造を、可証性述語を通じて研究した(神戸大学の菊池誠准教授との共同研究)。本研究により、矛盾に至る証明をもつ超準モデルにおける証明構造の分析が進んだと考えられる。

研究成果の概要(英文)：I studied the notions of proofs and provability in formal systems by investigating provability predicates.

1. Syntactical approach: We extended the first and second incompleteness theorems to arithmetically definable theories of arithmetic. This research is a joint work with Professor Kikuchi Makoto (Kobe University). Also I defined the notion that a theory has the Σ_n disjunction property, and we revealed several properties of this notion.
2. Semantical approach: I studied the structure of proofs in nonstandard models of arithmetic by investigating provability predicates. By this research, our understanding of the structure of proofs in nonstandard models having a proof of $0=1$ was deepened. This is also a joint work with Professor Makoto Kikuchi.

研究分野：数理論理学

キーワード：数理論理学 数学基礎論 不完全性定理 形式的算術 証明可能性 可証性述語 算術の超準モデル

1. 研究開始当初の背景

数理論理学における重要な定理である不完全性定理の証明には「 x は理論 T において証明可能である」という意味内容をもつ論理式 $Pr(x)$ (可証性述語) を用いることが本質的である。ゲーデルは可証性述語を用いることで理論の不完全性に関する第一不完全性定理、および T の無矛盾性を表す文 $Con(T)$ の証明不可能性に関する第二不完全性定理を証明した。

可証性述語の性質を調べることによって、不完全性定理および形式的証明の構造を理解するという研究はゲーデルによる不完全性定理以降に盛んに行われてきた。そういった研究の中で、可証性述語の様々な性質は証明の概念を形式化する際のコーディングの方法に依存すること、また、 ω_1 定義可能でない理論や可証性述語が通常のものとは異なる振る舞いをすることも分かってきた。したがって、証明という概念の様々な側面を理解するために、可証性述語についてこれまで以上に多角的な視点で分析することが重要である。

2. 研究の目的

可証性述語の性質を解析し、不完全性定理や証明という概念の本質的な理解を行うことによって、形式的証明可能性および形式的証明の構造及び性質を理解することが本研究の目的である。通常考えられている枠組みを越えて証明可能性という概念を考えると、どのような状況が起こり得るのかを知ること、逆に、証明の構造や証明可能性の形式化に関して最も自然な性質や状態が一体何であるかを理解するということが最終的な目標である。

3. 研究の方法

可証性述語の解析を中心に構文論的、意味論的に理論の証明可能性と証明構造について分析した。構文論的には、 ω_1 定義可能でない理論における証明可能性を分析する際に、その可証性述語についてどのような性質が成り立つのかを調べるという研究を進めた。また意味論的には、超準モデルにおける可証性述語の動きを分析することで可証性述語のもつ多様な性質を見出す、という方法で研究を進めた。

実際の研究は神戸大学の菊池誠准教授らと共同研究を行うことによって進めた。

4. 研究成果

(1) 算術の超準モデルにおける証明構造の研究を、超準モデルにおける可証性述語の振る舞いについて調べることによって行った。ペアノ算術 PA の超準モデル M における定理全体の集合を $Thm(M)$ と表す。すなわち $Thm(M) = \{ \varphi : M \models Pr(\varphi) \}$ と定める。 $Thm(M)$ に関する基本的な諸性質はこれまで菊池誠准教授との共同研究で得ていたが、

今回は更に次の結果を得た。

$Thm(M)$ と $Thm(K)$ がお互いに包含関係をもたないようなモデル M と K (比較不能なモデル) はお互いに相反する定理を証明すること、すなわちある文 φ が存在して、 $\varphi \in Thm(M)$ であるが $\neg \varphi \in Thm(K)$ となることを証明した。

$PA + Con(PA + Con(PA))$ のモデルがその終拡大に比較不能なモデルをもつことを証明した。

自然数の標準モデル N について、 $Thm(M)$ が $Thm(N)$ より真に大きい超準モデル M に対して、正しいが実際には PA で証明できない命題 φ が存在して $\varphi \in Thm(M)$ となることを証明した。

これらの結果により超準モデルにおける証明構造の分析に関する研究に一区切りがついたため、これまでに得られていた結果と合わせて論文としてまとめ投稿し、学術論文誌『Journal of Symbolic Logic』に掲載されることが決定した。

(2) ゲーデル・ロッサーによる第一・第二不完全性定理を、算術的に定義可能な理論に対して拡張する研究を行った。

通常的第一不完全性定理の証明は ω_1 定義可能な理論に対するものである。一方、無矛盾かつ ω_2 定義可能な理論で完全なものが存在することは比較的容易に分かるため、ゲーデル・ロッサーの第一不完全性定理をそのまま ω_n 定義可能な理論に拡張することはできない。また PA を定義する ω_1 論理式で、その論理式によって定められる無矛盾性言明 $Con(PA)$ が PA で証明できるものが存在することが Feferman によって証明されているため、第二不完全性定理もそのまま拡張することはできない。

本研究では、理論が無矛盾であることと ω_0 健全であることの同値性に着目して、可証性述語を用いた不完全性定理の証明が、理論の ω_1 定義可能性を仮定しない場合でも理論の健全性の仮定を強めることで実行可能であることを示した。

具体的には、ゲーデル・ロッサーの第一不完全性定理の拡張として、 ω_{n+1} 定義可能かつ ω_n 健全な理論には証明も反証もできない ω_{n+1} 文が存在することを証明した。更に、通常的第一不完全性定理の場合と同様に、そういった文が無矛盾性言明としてとれること、すなわち ω_{n+1} 定義可能かつ ω_n 健全な理論には証明も反証もできない無矛盾性言明が存在することを証明した。またこの結果が最適であること、すなわち ω_{n+2} 定義可能かつ ω_n 健全かつ完全な理論が存在することを示した。

第二不完全性定理の拡張として、 ω_{n+1} 定義可能かつ ω_n 健全な理論が自らの ω_n 健全性を証明できないことを示した。更にその逆も成り立つこと、つまり ω_{n+1} 定義可能な理論が自らの ω_n 健全性を証明できないならば ω_n 健全であることを示した。

(3) 論理式のクラス について,理論が 選言特性もしくは 存在特性をもつという概念を定義し,これらの性質が 1 定義可能とは限らない理論の証明可能性を考える際の良い指標となりうることを得た .

理論 T が 選言特性 (Σ_n -DP) をもつとは, 任意の 文 ϕ について, T が ϕ を証明するならば, T は ϕ を証明することをいう . また T が 存在特性 (Σ_n -EP) をもつとは, 任意の 1 変数 論理式 $\phi(x)$ について, T が $\exists x \phi(x)$ を証明するならば, ある自然数 n が存在して T が $\phi(n)$ を証明することをいう .

ゲーデル・ロッサーの不完全性定理は, 1 定義可能かつ無矛盾な理論は $B(\Sigma_n)$ 選言特性をもたない, という形で述べることができる . ここで $B(\Sigma_n)$ は 1 論理式のプール結合のクラスである . 1 定義可能かつ無矛盾な理論が 1 選言特性をもたないことは Ignjatovic and Grulovic によって示されており, これはゲーデル・ロッサーによる不完全性定理を強めたものである .

また 1 選言特性が 1 定義可能な理論に対する多くの良い性質と同値であることが Jensen and Ehrenfeucht, Guaspari, Smorynski などによって調べられており, 選言特性のもつ一般的な構造は不完全性定理や証明可能性のもつ構造と深く関わっている .

本研究では, 具体的には次の成果を得た .

Σ_n 選言特性, Σ_n 存在特性と, その他 Σ_n 完全性 (Σ_n -compl.) などの諸性質との関係を明らかにした (図 1) .

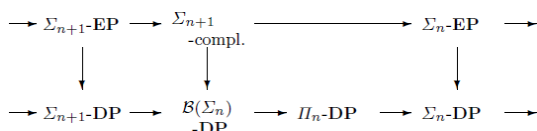


図 1 (各性質の関係)

Σ_{n+1} 定義可能かつ Σ_n 健全な理論が Σ_n 選言特性をもたないことを証明した .

Σ_n 定義可能かつ Σ_n 存在特性をもつ理論が自分自身が Σ_n 選言特性をもつことを証明できないことを証明した .

Σ_n 選言特性と Σ_n 選言特性のモデル論的な特徴づけを与えた .

Σ_n 選言特性と Σ_n 保存性との関係を明らかにした .

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 5 件)

Taishi Kurahashi, 'Rosser-type undecidable sentences based on Yablo's paradox', Journal of Philosophical Logic, 43(5), 999-1017, 2014.

Makoto Kikuchi and Taishi Kurahashi, 'Liar-type paradoxes and the incompleteness phenomena', Journal of Philosophical Logic, (掲載決定済).

Makoto Kikuchi and Taishi Kurahashi, 'Illusory models of Peano arithmetic', The Journal of Symbolic Logic, (掲載決定済).

Taishi Kurahashi, 'Henkin sentences and local reflection principles for Rosser provability', Annals of Pure and Applied Logic, 167(2), 73-94, 2016.

Makoto Kikuchi and Taishi Kurahashi, 'Universal Rosser predicates', The Journal of Symbolic Logic, (掲載決定済).

[学会発表](計 7 件)

菊池誠・倉橋太志, '算術の超準モデルにおける定理と証明について', 日本数学会 2014 年秋季総合分科会, 2014 年 9 月 27 日, 広島大学 .

倉橋太志, ' $\Sigma_1=1$ の証明をもつ超準モデル', 第 2 回山陰基礎論・解析学研究集会, 2015 年 1 月 24 日, 米子 .

倉橋太志・菊池誠, ' Σ_n 定義可能な算術の不完全性定理', 日本数学会 2015 年度年会, 2015 年 3 月 22 日, 明治大学 .

菊池誠・倉橋太志, 'Heterodox models of Peano arithmetic', 15th Congress of Logic, Methodology and Philosophy of Science, 2015 年 8 月 5 日, ヘルシンキ大学(フィンランド).

倉橋太志, 'Rosser-type Henkin sentences and local reflection principles', 2015 年 8 月 7 日, ヘルシンキ大学(フィンランド).

倉橋太志, '証明可能性論理' 数学基礎論サマースクール 2015 (招待講演), 2015 年 8 月 18 日~20 日, 神戸大学 .

倉橋太志, '理論の部分保存性について', 第 3 回山陰基礎論・解析学研究集会, 2016 年 1 月 30 日, 米子 .

[図書](計 1 件)

菊池誠(編), 佐野勝彦・倉橋太志・薄葉季路・黒川英徳・菊池誠(著), '数学における証明と真理-様相論理と数学基礎論', 共立出版, 288 ページ, 2016 年 .

[産業財産権]

出願状況(計 0 件)

取得状況（計0件）

〔その他〕
ホームページ等

6．研究組織

(1)研究代表者

倉橋 太志（KURAHASHI, Taishi）
木更津工業高等専門学校・基礎学系・講師
研究者番号：10738446